曲面の写像類群とホモロジーシリンダーに関わる群のねじれ元

野崎雄太（横浜国立大学）

種数 g で連結成分 1 つの（連結，向き付け可能，コンパクトな）曲面を $\Sigma_{g,1}$ と書き，その自己同相写像のイソトピー類からなる群 $\mathcal{M}_{g,1}$ を写像類群と呼ぶ：

$$\mathcal{M}_{g,1} = \{f \in \mathrm{Homeo}(\Sigma_{g,1}) \mid f|_{\partial\Sigma_{g,1}} = \mathrm{id}_{\partial\Sigma_{g,1}}\}/\text{isotopy rel } \partial.$$

$\mathcal{M}_{g,1}$ は $H_1(\Sigma_{g,1};\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{2g}$ に作用し, すなわち準同型 $\mathcal{M}_{g,1} \to \mathrm{Aut}\, H_1(\Sigma_g;\mathbb{Z})$ を導く．その核 $\mathcal{I}_{g,1}$ は Torelli 群と呼ばれ，写像類群の研究で中心的な役割を担っている．$\mathcal{I} = \mathcal{I}_{g,1}$ を調べる上で，降中心列 $\mathcal{I}(1) = \mathcal{I}$, $\mathcal{I}(n+1) = [\mathcal{I}, \mathcal{I}(n)]$ に着目する．次数商 $\mathcal{I}(1)/\mathcal{I}(2)$ つまり Abel 化は Johnson によって決定されており，特に位数 2 のねじれ元が存在する．$n \geq 2$ に対する次数商は，$\bigoplus_{n=1}^{\infty}(\mathcal{I}(n)/\mathcal{I}(n+1)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ の Lie 代数構造などに着目して，たとえば森田 [4]，Hain [2]，森田, 逆井, 鈴木 [5]，Kupers, Randal-Williams [3] によって深く研究されている．本講演では，$n \geq 2$ においても，n が奇数で $g \geq 3n$ という条件下で $\mathcal{I}(n)/\mathcal{I}(n+1)$ がねじれ元を含むことを紹介する．その証明では，以下に述べる 3 次元トポロジーの枠組みが鍵となる．

向き付けられたコンパクト 3 次元多様体 M と向きを保つ同相写像 $m\colon \partial(\Sigma_{g,1} \times [-1,1]) \to \partial M$ の組 (M,m) が $\Sigma_{g,1}$ 上のホモロジーシリンダーであるとは，各曲面 $\Sigma_{g,1} \times \{\pm 1\}$ への制限 $m_{\pm}$ が同型写像 $(m_{\pm})_*\colon H_*(\Sigma_{g,1};\mathbb{Z}) \to H_*(M;\mathbb{Z})$ を誘導し，かつ $(m_+)_* = (m_-)_*$ が成り立つことを言う．また 2 つのホモロジーシリンダー (M,m) と (M',m') に対して，同相写像 $f\colon M \to M'$ が存在して $f \circ m = m'$ を満たすとき，それらを同一視する．$\Sigma_{g,1}$ 上のホモロジーシリンダー全体の集合 $\mathcal{IC}_{g,1}$ には，$M \circ M' = (M \cup_{m_+ = m'_-} M', m_- \cup m'_+)$ によって積が定まり，モノイドとなる．ここでクラスパー手術から定まる Y_n 同値という関係を用いて，$\mathcal{IC} = \mathcal{IC}_{g,1}$ の部分モノイド $Y_n\mathcal{IC} = \{(M,m) \in \mathcal{IC} \mid (M,m) \sim_{Y_n} \mathfrak{c}(\mathrm{id}_{\Sigma_{g,1}})\}$ を定義する．これら $\mathcal{IC} = Y_1\mathcal{IC} \supset Y_2\mathcal{IC} \supset \cdots$ は，単射モノイド準同型

$$\mathfrak{c}\colon \mathcal{I}_{g,1} \to \mathcal{IC}_{g,1}, \quad \mathfrak{c}(\varphi) = (\Sigma_{g,1} \times [-1,1], \varphi \times \{1\} \cup \mathrm{id}_{\Sigma_{g,1}} \times \{-1\})$$

に対して $\mathfrak{c}(\mathcal{I}(n)) \subset Y_n\mathcal{IC}$ を満たし，Abel 群の間の準同型 $\mathcal{I}(n)/\mathcal{I}(n+1) \to Y_n\mathcal{IC}/Y_{n+1}$ が誘導される．

$Y_n\mathcal{IC}/Y_{n+1}$ を調べる強力な道具として，Cheptea, Habiro, Massuyeau [1] によって導入された LMO 関手がある．LMO 関手は Kontsevich 不変量を土台に構成され，ホモロジーシリンダーに対してある種のグラフの無限和を返す．本講演では LMO 関手から新たな準同型を定義し，それが $Y_n\mathcal{IC}/Y_{n+1}$ のねじれ元を捉えていることを丁寧に解説する．特に $Y_6\mathcal{IC}/Y_7$ に位数 3 のねじれ元が存在することを証明する．本講演は，佐藤正寿氏（東京電機大学）と鈴木正明氏（明治大学）との共同研究 [6] に基づく．

[1] D. Cheptea, K. Habiro, and G. Massuyeau. A functorial LMO invariant for Lagrangian cobordisms. *Geom. Topol.*, 12(2):1091–1170, 2008.

[2] R. Hain. Infinitesimal presentations of the Torelli groups. *J. Amer. Math. Soc.*, 10(3):597–651, 1997.

[3] A. Kupers and O. Randal-Williams. On the Torelli Lie algebra. *Forum Math. Pi*, 11:Paper No. e13, 47, 2023.

[4] S. Morita. Abelian quotients of subgroups of the mapping class group of surfaces. *Duke Math. J.*, 70(3):699–726, 1993.

[5] S. Morita, T. Sakasai, and M. Suzuki. Torelli group, Johnson kernel, and invariants of homology spheres. *Quantum Topol.*, 11(2):379–410, 2020.

[6] Y. Nozaki, M. Sato, and M. Suzuki. Torsion elements in the associated graded of the Y-filtration of the monoid of homology cylinders. *Journal of Topology*, 18(3):e70028, 2025.