

族のクラスパー手術と埋め込みの空間 $\text{Emb}(S^j, S^n)$ のトポロジー

入倉 大樹

Vassiliev 不変量は結び目の強力な不変量であるが、すべての Vassiliev 不変量を用いれば結び目を完全に区別できるかどうかは、現在も未解決である。特に、すべての Vassiliev 不変量が自明な結び目と同じ値をとる結び目が、必ず自明であるかどうかとも知られていない。

一方で Goussarov [2] や Habiro [3] によって発展させられたクラスパー手術の理論がある。クラスパー手術を用いると、結び目のアイソトピー類で生成される加群に $\mathcal{K}_1 \supset \mathcal{K}_2 \supset \cdots \supset \mathcal{K}_n \supset \cdots$ という自然なフィルトレーションを定めることができる。これは Goussarov–Habiro フィルトレーションと呼ばれ、Vassiliev 不変量と深く結び付いている。特に、上で述べた自明結び目を区別する問題は、このフィルトレーションが分離的であるか、すなわち $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{K}_n = 0$ が成り立つかどうかという問題として捉えることができる。

Vassiliev 不変量やクラスパー手術の理論は、通常の結び目だけでなく、球面の埋め込み全体の空間 $\text{Emb}(S^j, S^{j+2})$ に対しても考えることができる。特に、そのアイソトピー類 $\pi_0(\text{Emb}(S^j, S^{j+2}))$ に対して同様のフィルトレーションを考えると、通常の結び目の場合とは異なり、その共通部分が非自明になることが知られている。[4]

本講演では、クラスパー手術の理論を、埋め込み空間の高次ホモトピー群 $\pi_{j-1}(\text{Emb}(S^j, S^{j+2})) \otimes \mathbb{Q}$ に対して考える。この場合、クラスパーの計算は、通常の結び目や j 次元結び目の場合と比べて単純になる。特に、このホモトピー群上に定まる Goussarov–Habiro 型のフィルトレーションについて、その共通部分が自明であることをクラスパーの計算を用いて示す。

また、 $\pi_{j-1}(\text{Emb}(S^j, S^{j+2})) \otimes \mathbb{Q}$ が無限次元であることは、Budney–Gabai [1] および Watanabe [5] によって示されている。両者がそれぞれ構成した無限族は、等価であることが知られている。本講演では、これらの無限族とクラスパー手術との関係についても説明したい。

参考文献

- [1] Ryan Budney and David Gabai. *Knotted 3-balls in S^4* . 2021. arXiv: 1912.09029 [math.GT].
- [2] M. Goussarov. “On n -equivalence of knots and invariants of finite degree”. In: *Topology of manifolds and varieties*. Vol. 18. Adv. Soviet Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, pp. 173–192. ISBN: 0-8218-4124-6. DOI: 10.1007/bf01130282.
- [3] Kazuo Habiro. “Claspers and finite type invariants of links”. In: *Geom. Topol.* 4 (2000), pp. 1–83. ISSN: 1465-3060, 1364-0380. DOI: 10.2140/gt.2000.4.1. URL: <https://doi.org/10.2140/gt.2000.4.1>.

- [4] Tadayuki Watanabe. “Clasper-moves among ribbon 2-knots characterizing their finite type invariants”. In: *J. Knot Theory Ramifications* 15.9 (2006), pp. 1163–1199. issn: 0218-2165,1793-6527. DOI: 10.1142/S0218216506005056.
- [5] Tadayuki Watanabe. *Theta-graph and diffeomorphisms of some 4-manifolds*. 2023. arXiv: 2005.09545 [math.GT].