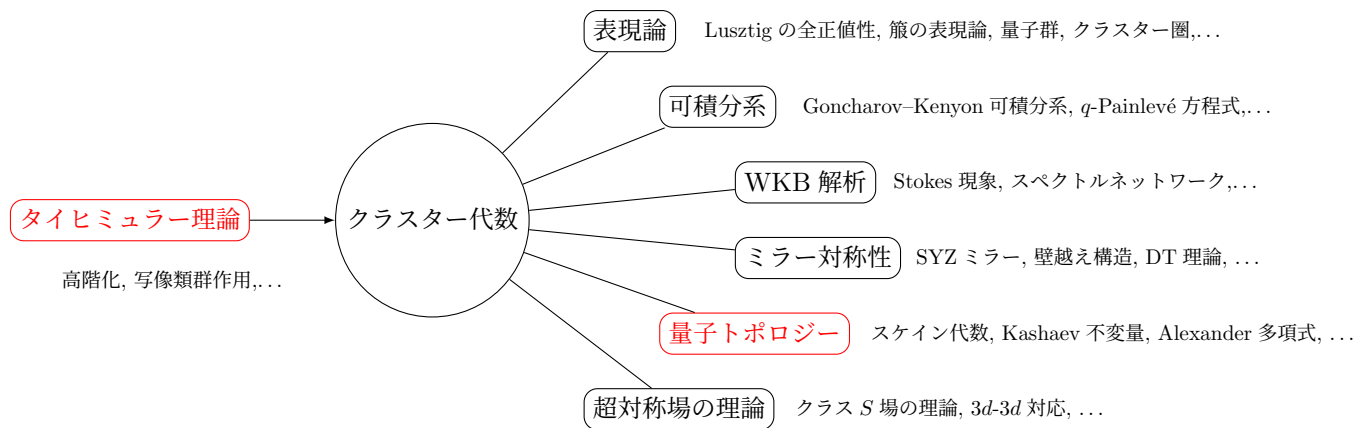


クラスター代数とトポロジー

石橋典

クラスター代数 (団代数) とは 2000 年代初頭に Fomin–Zelevinsky [FZ02] により定式化された代数構造であり、表現論や可積分系、そして曲面のタイヒミュラー理論など一見全く異なる分野に現れていた特徴的な「変換公式」をクラスター変換という共通の枠組みによって統一的に記述できることを明らかにした。その誕生以来、クラスター代数はさらに多くの数学・数理物理の分野との関係を見出しながら発展を続けている:



本講演ではクラスター変換の幾何学的な起源のひとつであるタイヒミュラー理論から出発し [FST08], クラスター代数の基本的な考え方を幾何学的な立場から解説する。また、クラスター代数の応用上重要な特徴はその「量子化」の枠組みが備わっている点にある。タイヒミュラー空間のクラスター構造を「量子化」することで、量子タイヒミュラー理論が構成される [CF99, FG09]。本講演では量子タイヒミュラー理論と曲面のスケイン代数 [AK17], そして 3 次元多様体の Kashaev 不変量 [Ish26] との関係を紹介したい。大まかな予定は以下のとおりであるが、具体的な内容は聴衆の関心に応じて適宜変更する:

- 1 コマ目: タイヒミュラー空間上の座標系とクラスター変換
- 2 コマ目: タイヒミュラー空間の量子化と量子トポロジー

参考文献

- [AK17] D. G. L. Algegetti and H. K. Kim, *A duality map for quantum cluster varieties from surfaces*, Adv. Math. **306** (2017), 1164–1208.
- [CF99] L. O. Chekhov and V. V. Fock, *Quantum Teichmüller spaces*, Teoret. Mat. Fiz. **120** (1999), no. 3, 511–528; translation in Theoret. and Math. Phys. **120** (1999), no. 3, 1245–1259.
- [FG09] V. V. Fock and A. B. Goncharov, *The quantum dilogarithm and representations of quantum cluster varieties*, Invent. Math. **175** (2009), no. 2, 223–286.
- [FZ02] S. Fomin and A. Zelevinsky, *Cluster algebras I: Foundations*, J. Amer. Math. Soc., **15** (2):497–529, 2002.
- [FST08] S. Fomin, M. Shapiro and D. Thurston, *Cluster algebras and triangulated surfaces. I. Cluster complexes*, Acta Math. **201** (2008), 83–146.
- [Ish26] T. Ishibashi, *Cyclic quantum Teichmüller theory*, Commun. Math. Phys. **407**, 173 (2026).