

A refinement of the Pontryagin–Thom theorem for unstable Thom spectra and its applications

黒田直樹 東京大学大学院数理科学研究科

本講演では同境群と Thom spectrum のホモトピー群を結びつける Pontryagin–Thom 構成を, unstable Thom spectrum の枠組みにおいて精密化する. m を正の整数, n を 1 でない非負整数, $\xi \rightarrow X$ を $n + m$ 次元ベクトル束とする.

n 次元閉多様体 M , 連続写像 $f: M \rightarrow X$, およびベクトル束の同型 $\phi: TM \oplus \mathbb{R}^m \cong f^*\xi$ からなる三つ組 (M, f, ϕ) を考え, 自然な同値関係を導入して得られる同境群を $\Omega_n^{(X;\xi)}$ と書く (二項関係が推移律を満たすために $n \neq 1$ が必要であり, これは Bökstedt–Svane [1] の n が奇数という十分条件を改善したものである).

定理 1 (Pontryagin–Thom 構成の精密化). $\mathbb{Z}$ 加群の同型

$$\Omega_n^{(X;\xi)} \cong \pi_{-m}(X^{-\xi})$$

が存在する. ξ を普遍ベクトル束にとると, 古典的な Pontryagin–Thom 同型が復元される.

応用として, n 次元閉 Spin 多様体 M と部分直線束 $\eta \subset TM \oplus \mathbb{R}$ の組 (M, η) から定まる同境群 $\Omega_n^{\text{Spin}, \text{line}}$ を考える. Smith homomorphism に由来する Thom spectrum 間の fiber sequence を用いることで, この同境群を含む長完全列が得られ, 次の結果が得られる.

定理 2. $n \geq 2$ とする. このとき, 全射準同型

$$\epsilon: \Omega_n^{\text{Spin}, \text{line}} \rightarrow \Omega_{n-1}^{\text{Pin}^-} \oplus \Omega_n^{\text{Spin}}$$

が存在し,

$$\ker \epsilon \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & n \equiv 1, 3, 4, 5 \pmod{8}, \\ 0, & n \equiv 0, 2, 6, 7 \pmod{8}. \end{cases}$$

が成り立つ.

この系として, コンパクト $(n+1)$ 次元 Spin 多様体 M と部分直線束 $\eta \subset TM$ の組 (M, η) であって,

$$\partial M \cong S^n, \quad \eta|_{\partial M} = \text{法直線束}$$

を満たすものが存在するのは, $n \equiv 0, 2, 6, 7 \pmod{8}$ のとき, かつそのときに限ると分かる.

本発表は, 筆者のプレプリント [2] に基づく.

参考文献

- [1] M. Bökstedt and A. M. Svane, A geometric interpretation of the homotopy groups of the cobordism category, *Algebr. Geom. Topol.* **14** (2014), 1649–1676.
- [2] N. Kuroda, A refinement of the Pontryagin–Thom theorem for unstable Thom spectra and its applications, arXiv:2602.16270 [math.AT], 2026.