

層の安定ホモトピー論と Seiberg–Witten 理論

前川拓海

Borel–Moore の切除定理・MV 系列や Verdier 双対定理に見られるように、被覆次元有限の（局所コンパクト）位相空間 X に対するアーベル層の導来圏 $\mathcal{D}(\mathrm{Shv}(X, \mathrm{Ab}))$ は、代数的トポロジーにおける非常に有用な不変量である。一方このような層コホモロジーの圏化理論の、一般コホモロジー版に相当するものが、層の安定 ∞ 圏 $\mathrm{Shv}(X, \mathrm{Sp})$ である。古典的な導来圏の技法（現在の hyperdescent）と異なり、被覆次元の仮定なく固有順像の余連続性が成立する点は、特筆に値する。

さて X を四次元スピンの閉多様体とすると、古田 [1] は Seiberg–Witten 理論を用いて、球面スペクトラムの間の写像 $\mathbb{S}^{2\mathrm{ind}(D_A)} \rightarrow \mathbb{S}^{b_2^+(X)}$ を構成した。ここで $\mathrm{ind}(D_A)$ はスピンの Dirac 指数、 $b_2^+(X)$ は $H^2(X)$ の最大正定値階数である。現在は Bauer–Furuta 不変量として知られる。この不変量に対して、その現代的・関手的な解釈はこれまで与えられていなかったのだが、[3] において、層の安定 ∞ 圏とその間の固有順像関手を用いた構成が与えられた。

講演の第一部では、安定 ∞ 圏論の基礎および ∞ 圏における層の理論を復習し、Lurie による重要結果である固有底変換定理 [2, 7.3.1.16] について述べる。第二部では、これらを用いて Bauer–Furuta 不変量を再構成する議論を紹介し、時間が許せば発展的話題についても述べる。

参考文献

- [1] M. Furuta, *Monopole equation and the $\frac{11}{8}$ -conjecture*, Math. Res. Lett. 8 (2001), no. 3, 279–291.
- [2] J. Lurie, *Higher topos theory*, Annals of Math. Stud. vol. 170, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2009.
- [3] T. Maegawa, *A six-functor formalism for sheaves over locally proper maps and the Bauer–Furuta construction*, Ph.D. dissertation, 2026.