有理ホモトピー論入門

2015.7

Reference

[FHT] Félix-Halperin-Thomas,
Rational Homotopy Theory, Springer GTM205

§0. Introduction

有理 homotopy 論 とは
「空間の"有理 homotopy 型"を調べる分野/道具」
である。

Def 0.1

X, Y: 1-conn. top. space
$f: X \longrightarrow Y$: conti.
に対し、

f: rational homotopy equivalence

$\underset{\text{def}}{\iff} \pi_*(f) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$: isom

また、これによる空間の"同値類"を
rational homotopy type (有理 homotopy 型)
という。

Thm 0.2 (Whitehead-Serre)

X, Y: 1-conn top. sp., $f: X \to Y$
TFAE:
- $\pi_*(f) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$: isom
- $H_*(f;\mathbb{Q})$: isom
- $H^*(f;\mathbb{Q})$: isom

↪ X の rational homotopy type を調べると、
$\pi_*(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ や $H^*(X;\mathbb{Q})$ が分かる。

Rmk 0.3

上の def の正当性は、例えば次の Thm により保証される

Thm (Whitehead)

X, Y: CW cpx, $f: X \to Y$
について、
f: homotopy equivalence
$\iff \pi_*(f)$: isom

rational homotopy theory の優れている点は、
「ある意味で空間と代数が1対1に対応する」という点である

Thm 0.4 (Sullivan)

$$\left\{\begin{array}{l}\text{rational homotopy types of} \\ \text{1-conn. fin type top. sp's}\end{array}\right\} \underset{\text{bij}}{\overset{\cong}{\longleftrightarrow}} \left\{\begin{array}{l}\text{quasi-isom. classes of} \\ \text{1-conn. fin. type Sullivan algebras}\end{array}\right\} \underset{\text{bij}}{\overset{\cong}{\longleftrightarrow}} \left\{\begin{array}{l}\text{isom classes of} \\ \text{1-conn. fin. type Sullivan algebras}\end{array}\right\}$$

Rmk 0.5

- rational homotopy theory は
  - dga (differential graded algebra)
  - dgla (diff. graded Lie algebra)

  のいずれを使うかによって、大きく2つに分けられる
  上の Sullivan のものは dga を使う方
  dgla を使う方は Quillen によってつくられた
- Thm 0.4 の proof はしない。

更に、この"Sullivan algebra"は具体的計算において非常に扱い易い

直積、一点和、fibration の pullback などの「空間の操作」を、「代数の操作」に翻訳することができる。

今回の seminar では、Sullivan algebra の言葉を用いて fibration を取り扱うことを目標にする。

↪ 応用として、free loop space の cohomology などを計算する。

§1. Basic definitions

以下、このseminarでは、

$\mathbb{K}$: field of char. 0

とし、

$$\begin{cases} \cdot\ H_*(-) := H_*(-;\mathbb{K}),\quad H^*(-) := H^*(-;\mathbb{K}) \\ \cdot\ \otimes := \otimes_{\mathbb{K}},\quad \mathrm{Hom} := \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}} \end{cases}$$

と書く。

Notation: $\boxed{|x| := (\text{"degree" of } x)}$

Rmk 1.1

char p でも良かったり、そもそもfieldじゃなくても良かったりする部分もあるが、面倒なので最初から field of char 0 を仮定しておこう。

Def 1.2 (graded module)

- graded module とは
  $M = \{M^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ with M^i : $\mathbb{K}$-mod.
  のこと。
- graded module の submodule, quotient, direct sum, product は degreewise に def.

以下 M, N : graded mod. とする。

- $M\otimes N$: graded mod. を
  $$(M\otimes N)^k := \bigoplus_{i+j=k} (M^i\otimes N^j)$$
  により def
- $f : M \to N$: $\mathbb{K}$-linear map of deg n とは
  $f = \{f^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ with $f^i : M^i \to M^{i+n}$: $\mathbb{K}$-linear
  のこと。
- $\mathrm{Hom}(M,N)$: graded mod. を
  $$\mathrm{Hom}(M,N)^n := \{f : M\to N : \mathbb{K}\text{-lin. map of deg } n\} = \prod_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}(M^i, N^{i+n})$$

Def 1.3 (complex)

- complex とは (M,d) : pair で
  $$\begin{cases} \cdot\ M : \text{graded mod.} \\ \cdot\ d : M \to M : \mathbb{K}\text{-lin. map of deg } (+1) \\ \quad \text{s.t. } d\circ d = 0 \end{cases}$$
  なるもの
  $\rightsquigarrow H(M,d) := \mathrm{Ker}\, d / \mathrm{Im}\, d$: graded mod.

以下 $(M,d), (N,d)$: complex とする。

- $f : (M,d)\to(N,d)$: chain map of deg n とは
  $f : M \to N$: $\mathbb{K}$-lin. map of deg n
  s.t. $f\circ d = (-1)^n d\circ f$
  のこと。
  $\rightsquigarrow H(f) : H(M,d) \to H(N,d)$ が定まる。
- $f : (M,d) \to (N,d)$: $\mathbb{K}$-lin. map of deg 0 について
  f : quasi-isom
  $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} H(f)$: isom
- $(M\otimes N, d)$: complex を
  $$d : M\otimes N \longrightarrow M\otimes N,\quad m\otimes n \longmapsto dm\otimes n + (-1)^{|m|} m\otimes dn$$
  により def.
- $(\mathrm{Hom}(M,N), d)$: complex を
  $$d : \mathrm{Hom}(M,N) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M,N),\quad f \longmapsto d\circ f - (-1)^{|f|} f\circ d$$
  により def.

Rmk 1.4

graded mod, complex には "bounded" 的な条件は課さない。

Def 1.5 (graded algebra)

・ **graded algebra** とは

$\begin{cases} \cdot\ R : \text{graded mod.} \\ \cdot\ R\otimes R \longrightarrow R : \mathbb{K}\text{-lin. map of deg } 0 \\ \quad x\otimes y \longmapsto xy \\ \cdot\ 1 \in R^0 \end{cases}$

の組であって.

・ $(xy)z = x(yz) \quad (\forall x,y,z \in R)$

・ $x1 = x = 1x \quad (\forall x \in R)$

・ $R^n = 0$ for $\forall n < 0$. "bounded"

をみたすもの.

・ R : graded algebra が **(graded) commutative**

$\overset{\Longleftrightarrow}{\text{def}}$ $\forall x,y \in R$. $xy = (-1)^{|x||y|} yx$

Rmk 1.6 graded algebra には「下にbounded」で設定.

Def 1.7 (R-module)

・ R : graded alg. に対し **(left) R-mod** とは.

$\begin{cases} \cdot\ M : \text{graded mod} \\ \cdot\ R\otimes M \longrightarrow M : \text{lin. map of deg } 0 \\ \quad r\otimes m \longmapsto rm \end{cases}$

の組であって

・ $r(r'm) = (rr')m \quad (\forall r, r' \in R, \forall m \in M)$

・ $1m = m \quad (\forall m \in M)$

をみたすもの

・ R : graded alg, M : right R-mod
N : left R-mod

に対し.

$$M \otimes_R N := M\otimes N \Big/ \underbrace{\left\langle mr\otimes n - m\otimes rn \;\middle|\; \begin{smallmatrix} m\in M, n\in N \\ r \in R \end{smallmatrix} \right\rangle}_{\text{generate}/\mathbb{K}}$$

以下 R : graded alg, M, N : left R-mod とする.

・ $f : M \to N$: **R-linear map** of deg k
とは.

$f : M \to N$: $\mathbb{K}$-linear map of deg k
s.t. $\forall m \in M$, $\forall r \in R$. $f(rm) = (-1)^{k|r|} r f(m)$
のこと

・ $\mathrm{Hom}_R(M,N) := \{ f \in \mathrm{Hom}(M,N) \mid f : R\text{-linear} \}$
$\subset \mathrm{Hom}(M,N)$

Def 1.8 (dga)

・ **differential graded algebra** (dga) とは.

$\begin{cases} \cdot\ R : \text{graded algebra} \\ \cdot\ d : R \to R : \mathbb{K}\text{-lin map. of deg } +1 \end{cases}$

の組 (R,d) であって.

・ (R,d) : complex (i.e. $d\circ d = 0$)

・ $\forall r, r' \in R$ $d(rr') = (dr)\cdot r' + (-1)^{|r|} r\cdot(dr')$

をみたすもの. $\rightsquigarrow H(R,d)$: graded alg.

・ $(R,d), (S,d)$: dga に対し.

$f : (R,d) \to (S,d)$: **dga hom**

とは.

$f : (R,d) \to (S,d)$: chain map of $\underset{\sim}{\text{deg } 0}$
s.t. 積と1を保つ.
のこと.

・ **cdga** := commutative dga

Def 1.9 ((R,d)-module)

・ (R,d) : dga に対し. **(left) (R,d)-module** とは.

(M,d) : complex であって.

・ M : R-mod

・ $\forall r \in R$, $\forall m \in M$. $d(rm) = (dr)\cdot m + (-1)^{|r|} r\cdot dm$

をみたすもの. $\rightsquigarrow H(M,d) : H(R,d)$-mod.

・ (R,d) : dga, $(M,d), (N,d)$: (R,d)-mod
に対し.

$f : (M,d) \longrightarrow (N,d)$: **(R,d)-linear** of deg k

とは

R-linear かつ chain map of deg k

なるもののこと.

Rmk 1.10

$d : M \to M$: $\mathbb{K}$-linear
but NOT R-linear

$\rightsquigarrow$ homological algebra$/R = \oplus R^i$ は使えない

Lem 1.11

(R,d) : dga

(1) (M,d) : right (R,d)-mod, (N,d) : left (R,d)-mod
に対し.

$(M\otimes_R N, d)$: quotient complex of $(M\otimes N, d)$

(2) $(M,d), (N,d)$: left (R,d)-mod に対し.

$(\mathrm{Hom}_R(M,N), d) \subset (\mathrm{Hom}(M,N), d)$
: subcomplex

Def 1.12 (simplicial set)

・simplicial set とは

$$\begin{cases} \cdot\ K_n : \text{set} & (n\in\mathbb{N}) \\ \cdot\ d_i^{(n)} : K_n \longrightarrow K_{n-1} : \text{map} & \\ \quad d_i & (n\ge 1,\ 0\le i\le n) \\ \cdot\ s_j^{(n)} : K_n \longrightarrow K_{n+1} : \text{map} & \\ \quad s_j & (n\ge 0,\ 0\le i\le n) \end{cases}$$

の組であって

$$\begin{cases} \cdot\ d_i d_j = d_{j-1} d_i & (i<j) \\ \cdot\ s_i s_j = s_{j+1} s_i & (i\le j) \\ \cdot\ d_i s_j = \begin{cases} s_{j-1} d_i & (i<j) \\ \mathrm{id} & (i=j, j+1) \\ s_j d_{i-1} & (i>j+1) \end{cases} \end{cases}$$

をみたすもののこと.

・K, L : simplicial set に対して

$f : K \longrightarrow L$: simplicial map

とは、組

$f = \{f_n : K_n \longrightarrow L_n : \text{map}\}_{n\in\mathbb{N}}$

であって、d_i, s_j と可換なもののこと.

Example 1.13

X : top. sp. に対し

$S_*(X)$: singular simplicial set

を

$$\begin{cases} \cdot\ S_n(X) = X^{\Delta^n} \\ \cdot\ d_i : S_n(X) \longrightarrow S_{n-1}(X) \\ \quad\quad \sigma \longmapsto \sigma\circ\lambda^i \\ \cdot\ s_j : S_n(X) \longrightarrow S_{n+1}(X) \\ \quad\quad \sigma \longmapsto \sigma\circ\rho^j \end{cases}$$

where

- $\Delta^n = \{(t_0,\dots,t_n)\in\mathbb{R}^{n+1} \mid t_i\ge 0,\ \sum_{i=0}^{n} t_i = 1\}$
- $\lambda^i : \Delta^{n-1} \longrightarrow \Delta^n \quad (0\le i\le n)$
  $(t_0,\dots,t_{n-1}) \longmapsto (t_0,\dots,t_{i-1},0,t_i,\dots,t_{n-1})$
- $\rho^j : \Delta^{n+1} \longrightarrow \Delta^n \quad (0\le i\le n)$
  $(t_0,\dots,t_{n+1}) \longmapsto (t_0,\dots,t_{i-1},t_i+t_{i+1},t_{i+2},\dots,t_{n+1})$

により def.

Def 1.14

K : simp. set に対し、$(C^*(K), d)$: dga を

$$\begin{cases} \cdot\ C^p(K) := \{f : K_p \longrightarrow \mathbb{K} : \text{map} \mid \sigma\in K_p : \text{degenerate} \Rightarrow f(\sigma)=0\} \\ \cdot\ d : C^p(K) \longrightarrow C^{p+1}(K) \\ \quad\quad f \longmapsto \left(\sigma \mapsto \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^{p+i+1} f(d_i\sigma)\right) \\ \cdot\ C^p(K)\otimes C^q(K) \longrightarrow C^{p+q}(K) \\ \quad\quad f\otimes g \longmapsto \left(\sigma \mapsto f(d_{p+1}\cdots d_{p+q}\sigma)\cdot g(d_0\cdots d_{p-1}\sigma)\right) \end{cases}$$

← 無くても良い.

により def.

とくに $K = S_*(X)$ (X : top. sp.) のときは

$C^*(X) := C^*(S_*(X))$ と書く.

Rmk 1.15

$C^*(K)$ を "normalize" したものとして定めたが、これは "normalize" しないものと quasi-isom である.

Def 1.16 (free commutative graded alg.)

V : graded $\mathbb{K}$-mod s.t. $V^i = 0$ for ${}^\forall i<0$ に対し、

$\Lambda V := TV/I$: commutative graded alg

(where
TV : tensor alg. on V
$I := (v\otimes w - (-1)^{|v||w|} w\otimes v \mid v, w\in V) \subset TV$: two-sided ideal.)

と def.

Lem 1.17

ΛV : as above について次が成立:

(1) A : commutative graded alg,
$f : V \longrightarrow A$: $\mathbb{K}$-lin. map of deg 0
に対し、
$\exists!\ \tilde{f} : \Lambda V \longrightarrow A$: graded alg. hom.
s.t. $\tilde{f}|_V = f$

(2) $g : V \longrightarrow \Lambda V$: $\mathbb{K}$-lin. map of deg k
に対し、
$\exists\ \tilde{g} : \Lambda V \longrightarrow \Lambda V$: derivation of deg k
s.t. $\tilde{g}|_V = g$.

とくに、g : $\mathbb{K}$-lin map of deg +1 with $\tilde{g}g = 0$ なら $(\Lambda V, d)$: cdga が $d = \tilde{g}$ により定まる.

§2. Polynomial differential forms

§2.0 Intro.

X: top. sp. に対する $C^*(X)$ を調べるのが目標である。
この際、一般には $C^*(X)$ が 非可換 であることが一つの障害になっている。

ところが、係数が field of char. 0 なので、
$C^*(X)$ を可換なものにとりかえることができる：

Thm

正確には $A_{PL}(X) \simeq \cdot \xleftarrow{\simeq} C^*(X)$

$\exists\, A_{PL}(X)$: cdga
s.t. $A_{PL}(X) \simeq C^*(X)$

この $A_{PL}(X)$ を構成し、上の Thm の証明の概略を説明するのが §2 の内容である。

まずは $A_{PL}(X)$ の構成の idea を説明しよう。

Recall (diff. form on mfd)

M: n-mfd, $M = \bigcup_\lambda U_\lambda$: open cov s.t. $U_\lambda \cong \mathring{D}^n$ $\quad \mathring{D}^n \hookrightarrow M$

M 上の p 次 diff. form ω とは、

$$\omega_\lambda = \sum_{i_1 \cdots i_p} f_{i_1 \cdots i_p}\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$$

with $f_{i_1 \cdots i_p} \in C^\infty(\mathring{D}^n)$ ← C^∞-function

の族 $\{\omega_\lambda\}$ であって、適切な「貼り合わせ条件」をみたすもの
であった

Idea (poly diff. form on top. sp.)

X: top. sp. $\quad S_*(X)$: sing simp set ← "covering" $\quad \Delta^n \longrightarrow X$

X 上の p 次 poly. diff. form Φ とは、

$$\Phi_\sigma = \sum_{i_1 \cdots i_p} f_{i_1 \cdots i_p}\, dt_{i_1} \wedge \cdots \wedge dt_{i_p}$$

with $f_{i_1 \cdots i_p} \in \mathbb{K}[t_1, \cdots, t_{|\sigma|}]$ ← polynomial

の族 $\{\Phi_\sigma\}_{\sigma \in S_*(X)}$ であって
適切な「貼り合わせ条件」をみたすもの
"simplicial map"

§2.1 The construction $A(K)$

Def 2.1.1 (simp. dga)

simplicial dga とは Def 1.12 において set を dga に、map を dga hom におきかえたもののこと

i.e.
族 $A = \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ であって
- $A_n = (A_n, d)$: dga
- $d_i : (A_n, d) \longrightarrow (A_{n-1}, d)$: dga hom
- $s_j : (A_n, d) \longrightarrow (A_{n+1}, d)$: dga hom

が適切な条件をみたすもの

Def 2.1.2

A: simp. dga, K: simp. set に対し、
$A(K) = (A(K), d)$: dga を次で def：

- $A^p(K) := \{\Phi : K \to A^p : \text{simp map}\}$, $\quad \sigma \mapsto \Phi_\sigma$

  (where $A^p = \{A^p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$: simp. mod set)

- 和, scalar倍, 積, differential は値で入れる：

  $(\Phi + \Psi)_\sigma := \Phi_\sigma + \Psi_\sigma$, $(\lambda \cdot \Phi)_\sigma := \lambda \cdot \Phi_\sigma$

  $(\Phi \cdot \Psi)_\sigma := \Phi_\sigma \cdot \Psi_\sigma$, $(d\Phi)_\sigma := d(\Phi_\sigma)$

  (where $\Phi, \Psi \in A^p(K)$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $\sigma \in K$)

また、X: top. sp. に対して
$$A(X) := A(S_*(X)) \quad \text{と def.}$$

Rmk 2.1.3

$A(K)$ は A について covariant
K について contravariant である。

Def 2.1.4

A: simp. dga について、
A: extendable
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$
[Given $n \geq 1$, $I \subset \{0, 1, \cdots, n\}$: subset
$\quad \Phi_i \in A_{n-1}$ for $i \in I$
$\quad$ s.t. $d_i \Phi_j = d_{j-1} \Phi_i$ for $i < j \in I$
Then
$\quad \exists\, \Phi \in A_n$ s.t. $\forall i \in I$, $d_i \Phi = \Phi_i$

acyclic っぽい？

Prop 2.1.5

> A : extendable simp. dga
> K : simp. set, $L \subset K$: simp. subset
> **Then**
> $ind^* : A(K) \longrightarrow A(L)$: surj.
> よって、
> $A(K,L) := \mathrm{Ker}(ind^* : A(K) \to A(L))$
> $\subset A(K)$: differential ideal ($\Rightarrow$ complex)
> と定めれば
> $0 \to A(K,L) \to A(K) \to A(L) \to 0$
> : exact seq. of complexes

proof

$K(n) \subset K$: simp. subset を

$K(n) := \bigcup_{k \leq n} K_k \cup$ (その degeneracy たち)

で def　　<u>n-skeleton</u> of K

$\forall \varphi \in A(L)$ をとる

これに対し、

$\Phi(n) : K(n) \longrightarrow A$: simp. map

s.t. $\begin{cases} \Phi(n)|_{K(n-1)} = \Phi(n-1) \\ \Phi(n)|_{K(n)\cap L} = \varphi|_{K(n)\cap L} \end{cases}$

を n についての induction でつくる。

$\Phi(n-1)$ までつくれたとして、$\Phi(n)$ をつくるには、

$\sigma \in K_n$ に対する $\Phi(n)_\sigma$ を定めればよい

$d_i\sigma \in K_{n-1}$ に対する値 $\Phi(n-1)_{d_i\sigma}$ は既に定まっているので、extendable の条件を用いることで、$\Phi(n)_\sigma$ を定めることができる。

(well-defd とか、simp. map になっているかとかは check する必要があるが 省略)

//

Thm 2.1.6

> A, B : simp. dga
> $\theta : A \longrightarrow B$: hom of simp. dga
> **Assume**
> • A, B : extendable
> • θ : quasi-isom of simp. dga
> (i.e. $\forall n$, $\theta_n : A_n \xrightarrow{\simeq} B_n$: quasi-isom of dga)
> **Then**
> $\forall K$: simp. set に対し、
> $\theta_* : A(K) \xrightarrow{\simeq} B(K)$: quasi-isom of dga

proof　$\forall n$ に対して

$\theta_* : A(K(n)) \xrightarrow{\simeq} B(K(n))$: quasi-isom

が成り立つことを示せばよい

(Rmk　$K = \varinjlim K(n)$ だが
$H(A(K)) = H(A(\varinjlim K(n))) = H(\varprojlim A(K(n)))$
なので、少し議論が要る　　$\neq \varprojlim H(A(K(n)))$)

Prop 2.1.5 より

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & A(K(n),K(n-1)) & \to & A(K(n)) & \longrightarrow & A(K(n-1)) & \to 0 & : \text{exact} \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 \to & B(K(n),K(n-1)) & \to & B(K(n)) & \longrightarrow & B(K(n-1)) & \to 0 & : \text{exact} \end{array}$$

なので

$\theta_* : A(K(n),K(n-1)) \xrightarrow{\simeq} B(K(n),K(n-1))$: quasi-isom.

を示せば良い。($\Rightarrow$ induction)

ここで、

$\Delta[n]$: simp. set を "n-simplex"
$\cup$
$\partial\Delta[n]$: simp. subset を その boundary

と定めると、

$A(K(n),K(n-1)) \cong \prod_{\substack{\sigma\in K_n \\ \text{non-degenerate}}} A(\Delta[n], \partial\Delta[n])$　(Bも同様)

なので、

$\theta_* : A(\Delta[n],\partial\Delta[n]) \xrightarrow{\simeq} B(\Delta[n],\partial\Delta[n])$: quasi-isom

を示せばよい

これの proof は 略

(• $\partial\Delta[n] = \Delta[n](n-1)$ に着目して、ind. hyp. を使う
• $A(\Delta[n]) = A_n$
• $0 \to A(\Delta[n],\partial\Delta[n]) \to A(\Delta[n]) \to A(\partial\Delta[n]) \to 0$: exact)

//

§2.2 Definition of A_{PL}

A_{PL} : simp. dga を def したい.

まず, $n \in \mathbb{N}$ に対し

$(\Lambda V_n, d)$: dga

を

$$\left[\begin{array}{l} V_n := \mathbb{K}\{t_0, \cdots, t_n, y_0, \cdots, y_n\} \text{ : graded mod} \\ \quad (\text{where } |t_i| = 0,\ |y_i| = 1) \\ d : \Lambda V_n \longrightarrow \Lambda V_n \\ \quad t_i \longmapsto y_i \qquad \rightsquigarrow\ y_i = dt_i \\ \quad y_i \longmapsto 0 \end{array}\right.$$

により def. これにより, (poly. diff. forms on Δ^n)

$$(A_{PL})_n := (\Lambda V_n / I_n, d) \quad \text{: dga}$$

$$\left(\text{where } I_n := \left(1 - \sum_{i=0}^{n} t_i,\ \sum_{i=0}^{n} y_i\right) \underset{\text{ideal}}{\subset} \Lambda V_n\right)$$

と def.

Lem 2.2.1

(1) $(A_{PL})_n \cong (\Lambda(t_1, \cdots, t_n, y_1, \cdots, y_n), d)$: dga isom

defined by $dt_i = y_i$, $dy_i = 0$

(2) $H^*((A_{PL})_n) \cong \mathbb{K} \cdot 1$

proof (1) 明らか.

(2) $(A_{PL})_n \cong (\Lambda(t_1, \cdots, t_n, y_1, \cdots, y_n), d)$

$\cong \bigotimes_{i=1}^{n} (\Lambda(t_i, y_i), d)$

よって, Künneth thm より,

$H^*(\Lambda(t, y), d) \cong \mathbb{K} \cdot 1$ (where $dt = y$)

を示せばよいが

$$\Lambda(t, y) = \mathbb{K}\{1, t, t^2, t^3, \cdots, y, ty, t^2y, t^3y, \cdots\}$$

$$\begin{cases} d(t^k) = k t^{k-1} y \\ d(t^k y) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \text{char}\,\mathbb{K} = 0 \text{ が本質的に必要.}$$

より ok. //

simp. dga にしたいので, d_i, s_j を次で def:

$d_i : (A_{PL})_n \longrightarrow (A_{PL})_{n-1}$: dga hom

$$t_k \longmapsto \begin{cases} t_k & (k < i) \\ 0 & (k = i) \\ t_{k-1} & (k > i) \end{cases}$$

$$y_k \longmapsto \begin{cases} y_k & (k < i) \\ 0 & (k = i) \\ y_{k-1} & (k > i) \end{cases}$$

$s_j : (A_{PL})_n \longrightarrow (A_{PL})_{n+1}$: dga hom

$$t_k \longmapsto \begin{cases} t_k & (k < j) \\ t_k + t_{k+1} & (k = j) \\ t_{k+1} & (k > j) \end{cases}$$

$$y_k \longmapsto \begin{cases} y_k & (k < j) \\ y_k + y_{k+1} & (k = j) \\ y_{k+1} & (k > j) \end{cases}$$

これにより,

$A_{PL} = \{(A_{PL})_n\}_{n \in \mathbb{N}}$: simp. dga

が定まる.

($y_i = dt_i$ なので, $(A_{PL})_n^p$ の元は

$$\sum_{i_1, \cdots, i_p} f_{i_1 \cdots i_p}\, dt_{i_1} \cdots dt_{i_p} \quad (f_{i_1 \cdots i_p} \in \mathbb{K}[t_0, \cdots, t_q])$$

の形に書ける.

$\rightsquigarrow$ "poly. diff. form")

Lem 2.2.2

A_{PL} : extendable.

proof 頑張ってつくる. (略) //

§2.3 Proof of quasi-isom $A_{PL}(X) \simeq C^*(X)$

$\Delta[n]$: simp. set "n-simplex"

Def 2.3.1

C_{PL} : simp. dga を次で def:

$(C_{PL})_n := C^*(\Delta[n])$

(d_i, s_j は適切に)

Lem 2.3.2

K: simp. set に対し

$C_{PL}(K) \cong C^*(K)$: isom of dga

proof $\Delta[n]$ が "universal" なものだから //

C_{PL} と A_{PL} により,

$C_{PL}\otimes A_{PL}$: simp. dga

with $C_{PL} \longrightarrow C_{PL}\otimes A_{PL}$, $A_{PL} \longrightarrow C_{PL}\otimes A_{PL}$

$x \longmapsto x\otimes 1$, $y \longmapsto 1\otimes y$

が自然に定まる.

Lem 2.3.3

(1) $\forall n\in\mathbb{N}$ に対し

$H((C_{PL})_n) \cong H((C_{PL}\otimes A_{PL})_n) \cong \Bbbk\cdot 1$

(2) C_{PL}, $C_{PL}\otimes A_{PL}$: extendable

proof 略 //

Thm 2.3.4

K: simp. set に対し,

$C^*(K) \xrightarrow{\simeq} (C_{PL}\otimes A_{PL})(K) \xleftarrow{\simeq} A_{PL}(K)$

: quasi-isom's of dga

とくに X: top. sp. に対し,

$C^*(X) \xrightarrow{\simeq} (C_{PL}\otimes A_{PL})(X) \xleftarrow{\simeq} A_{PL}(X)$

proof

Thm 2.1.6, Lem 2.2.1, Lem 2.2.2, Lem 2.3.2, Lem 2.3.3 より明. //

まとめ

係数が field of char 0 なら, $C^*(X)$ の代わりに

$A_{PL}(X)$: commutative dga

を考えれば良い

§3 Semifree modules & Tor

§3.0 Intro.

目標は次の Thm を紹介すること:

Thm (Eilenberg-Moore)

$F \to E \xrightarrow{\pi} B$: fibration

with $\begin{cases} H^*(F) : \text{fin type}/\Bbbk \\ B : \text{1-conn.} \end{cases}$

$$\begin{tikzcd} f^*E \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & E \arrow[d, "\pi"] \\ X \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

$f: X \to B$ with X: 0-conn.

とし, 右図の pullback を考える.

Then

$\mathrm{Tor}_{C^*(B)}(C^*(X), C^*(E)) \xrightarrow{\cong} H^*(f^*E)$: isom

この Thm は標語的には次のように言える:

「空間の homotopy pullback の cohomology と
代数の homotopy pushout の cohomology が同型だ

Rmk

- π が fibration だから, 上の pullback は homotopy pullback にもなっている.
- Tor は ⊗ (= pushout of algebras) を quasi-isom 不変にしたものなので homotopy pushout のようなもの と言える

説明するべきこと:

(a) Tor の def

(係数環 ($C^*(B)$) も微分を持っているので, 「普通の」Tor を修正する必要がある)

(b) Tor の計算方法

ここでは (a) を扱い, (b) は §4, §5 で扱う

dga 上の Tor を def する前に「普通の」Tor を復習しよう.

§3.1 Recall from classical homological algebra

$\begin{cases} R : \text{ring without grading, differential} \\ M : R\text{-mod}, \quad N : \text{right } R\text{-mod} \end{cases}$

とする.

このとき, Mの projective resolution とは

$$\cdots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$$

: exact seq of R-mod's

s.t. $\forall n.\ P_n$: projective/R

これを用いて,

$$\mathrm{Tor}_n^R(N,M) := H_n(N \otimes_R P)$$

(where

$$N \otimes_R P = (\cdots \to N\otimes_R P_2 \to N\otimes_R P_1 \to N\otimes_R P_0 \to 0)$$

: complex)

と def するのであった.

これらは次のように言い換えられる

・Mの projective resolution とは

$P \xrightarrow{\simeq} M$: quasi-isom

(where $M = (\cdots \to 0 \to M \to 0 \to \cdots)$

$P = (\cdots \to P_1 \to P_0 \to 0 \to \cdots)$

with P_n : projective/R)

・$\mathrm{Tor}^R(N,M) := H(N \otimes_R P)$

(where $N = (\cdots \to 0 \to N \to 0 \to \cdots)$: complex)

上のようなPが持つ重要な性質として次がある:

Prop3.1.1

P : as above

$f : C \xrightarrow{\simeq} C'$: quasi-isom of complex/R

Then

$f \otimes_R 1 : C \otimes_R P \xrightarrow{\simeq} C' \otimes_R P$: quasi-isom

proof

$P(k) := (\cdots \to 0 \to 0 \to P_k \to P_{k-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to 0 \to \cdots)$

$\subset P$: sub complex

$0 \to P(k-1) \to P(k) \to \underset{\sim}{P_k} \to 0$: split exact

flat $\Rightarrow \otimes_R P_k$ は quasi-isomを保つ

↪ induction と $\varinjlim$ より $\otimes_R P$ も quasi-isomを保つ. //

§3.2 Definition & Properties of Semifree modules

以下

(R,d) : dga

とする.

Def3.2.1

(P,d) : semifree (R,d)-mod とは

(R,d)-module であって

$\exists\ 0 = P(-1) \subset P(0) \subset P(1) \subset \cdots \subset P$

: increasing sequence of (R,d)-submodules

s.t. $\begin{cases} \cdot\ P = \bigcup_k P(k) \\ \cdot\ \forall k.\ P(k)/P(k-1) : (R,d)\text{-free} \end{cases}$

(i.e. $\cong \bigoplus_\lambda (R,d)[n_\lambda]$

where $[n_\lambda]$ means shift)

Prop3.2.2

$\forall (M,d)$: (R,d)-mod

$\exists f : (P,d) \xrightarrow{\simeq} (M,d)$: quasi-isom

s.t. (P,d) : (R,d) semifree

proof

$f(k) : (P(k),d) \longrightarrow (M,d)$: (R,d)-linear of deg 0

を inductive に構成していく.

$k=0$ $H(M,d)$ の generator/$\mathbb{k}$ $\{[m_\lambda]\}_{\lambda\in\Lambda_0}$ とする.

これにより,

$\cdot\ (P(0),d) := (R,d) \otimes \mathbb{k}\{v_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_0}$

(where $|v_\lambda| = |m_\lambda|$)

$\cdot\ f(0) : (P(0),d) \longrightarrow (M,d)$

$v_\lambda \longmapsto m_\lambda$

と定める.

$\to H(f(0))$: surj.

$k=1$ $\mathrm{Ker}\, H(f(0))$ の generator/$\mathbb{k}$ $\{[p_\lambda]\}_{\lambda\in\Lambda_1}$ とする

これにより,

$\cdot\ P(1) := P(0) \oplus (R \otimes \mathbb{k}\{v'_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_1})$ (where $|v'_\lambda| = |p_\lambda| - 1$)

$\cdot\ dv'_\lambda := p_\lambda$

$\cdot\ f(1) : (P(1),d) \longrightarrow (M,d)$

$v'_\lambda \longmapsto m'_\lambda$ (where $dm'_\lambda = f p_\lambda$)

と定める.

$\to H(f(1))$: surj.

$k=2$ $\mathrm{Ker}\, H(f(1))$ の generator/$\mathbb{k}$ $\{[p'_\lambda]\}_{\lambda\in\Lambda_2}$ とする.

これにより ...

これをくり返して, $(P,d) = \varinjlim (P(k),d)$, $f := \varinjlim f(k)$

とすればok. //

Def 3.2.3

Prop 3.2.2 の f (又は単に (P,d)) を <u>semifree resolution</u> of (M,d) という.

Prop 3.2.4 (lifting property)

(P,d) : semifree (R,d)-mod
(M,d), (N,d) : (R,d)-mod

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[d, "\eta", "\simeq q"'] \\ P \arrow[ur, dashed, "\exists\varphi"] \arrow[r, "\psi"'] & N \arrow[ul, phantom, "h_k"] \end{tikzcd}$$

$\psi : (P,d) \longrightarrow (N,d)$: (R,d)-linear of deg 0
$\eta : (M,d) \xrightarrow{\simeq q} (N,d)$: quasi-isom$/(R,d)$

<u>Then</u>

$\exists \varphi : (P,d) \longrightarrow (M,d)$: (R,d)-linear of deg 0
s.t. $\eta\circ\varphi \underset{R}{\simeq} \psi$

(<u>i.e.</u> $\exists h : P \longrightarrow N$: R-linear of deg(-1)
s.t. $\eta\circ\varphi - \psi = d\circ h + h\circ d$)

しかも, このような φ は unique up to homotopy

← "cofibrant"

<u>proof</u>

$\varphi(k) : (P(k), d) \longrightarrow (M,d)$

を k について inductive につくっていく. //

Cor 3.2.5

$\forall (M,d)$: (R,d)-mod に対し, semifree resol of (M,d) は unique up to homotopy.

Prop 3.2.6

(P,d) : semifree (R,d)-mod
$f : (M,d) \xrightarrow{\simeq q} (N,d)$: quasi-isom. of (R,d)-mod's

<u>Then</u> (「左右」を適切に補って)

(1) $f \otimes_R 1 : (P \otimes_R M, d) \xrightarrow{\simeq q} (P \otimes_R N, d)$: quasi-isom

(2) $\mathrm{Hom}_R(f, 1) : (\mathrm{Hom}_R(P, M), d) \xrightarrow{\simeq q} (\mathrm{Hom}_R(P, N), d)$: quasi-isom

<u>proof</u> (1) $P(k)/P(k-1)$: (R,d)-free に注意して. Prop 3.1.1 と同様にやれば ok

(2) Prop 3.2.4 (+ degree shift) に他ならない //

§3.3 Definition & Properties of Tor

Def 3.3.1

(R,d) : dga
(M,d) : right (R,d)-mod, (N,d) : left (R,d)-mod
に対し.

$$\mathrm{Tor}_R(M,N) := H((M,d) \otimes_R (P,d))$$

(<u>where</u> $(P,d) \xrightarrow{\simeq q} (N,d)$: semifree resol.)

Rmk 3.3.2

- Cor 3.2.5 より well-def'd
- Prop 3.2.6 (1) より, (N,d) の代わりに (M,d) の semifree resol をとったものが, (M,d), (N,d) 両方の semifree resol をとったものとも同型である.
- R : without grading, differential のとき

$$\mathrm{Tor}^R_n(M,N) = \mathrm{Tor}^{-n}_R(M,N)$$

「普通の」 ↑ ↑ Def 3.3.1 のもの.

Prop 3.3.3

(1) Tor は (R,d), (M,d), (N,d) について functorial

<u>i.e.</u> $\varphi : (R,d) \longrightarrow (R',d)$: dga hom
$f : (M,d) \longrightarrow (M',d)$: right (R,d)-linear
$g : (N,d) \longrightarrow (N',d)$: left (R,d)-linear
に対し.

$$\mathrm{Tor}_\varphi(f,g) : \mathrm{Tor}_R(M,N) \longrightarrow \mathrm{Tor}_{R'}(M',N')$$

が定まる

(2) (1) において.

φ, f, g : quasi-isom $\Rightarrow$ $\mathrm{Tor}_\varphi(f,g)$: isom

が成立

<u>proof</u>

(1) Prop 3.2.4 より ok

(2) Prop 3.2.6 を使って ちょっと頑張ればできる. //

Def 3.3.4

$\mathrm{Tor}_R(M,N) \longrightarrow H(M \otimes_R N)$: hom of graded mod

が 次により (canonical に) 定まる:

$$\mathrm{Tor}_R(M,N) = H(M \otimes_R P) \xrightarrow{H(1\otimes f)} H(M \otimes_R N)$$

(<u>where</u> $f : (P,d) \xrightarrow{\simeq q} (N,d)$: semifree resol$/(R,d)$)

§3.4 Eilenberg-Moore theorem

statement を再掲しよう　$\mathbb{K}$: field of $\forall$char でok.

Thm 3.4.1 (Eilenberg-Moore)

$F \to E \xrightarrow{\pi} B$: fibration

with $\begin{cases} \cdot\ H^*(F) : \text{fin. type}/\mathbb{K} \\ \cdot\ B : 1\text{-conn.} \end{cases}$

$$\begin{tikzcd} f^*E \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\pi'"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & E \arrow[d, "\pi"] \\ X \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

$f: X \to B$ with X: 0-conn.

とし、右図の pullback を考える.

Then

$$\theta : \mathrm{Tor}_{C^*(B)}(C^*(X), C^*(E)) \xrightarrow{\cong} H^*(f^*E)$$

proof θは次によりdef:

$$\mathrm{Tor}_{C^*(B)}(C^*(X), C^*(E)) \xrightarrow{\text{Def 3.3.4}} H(C^*(X) \otimes_{C^*(B)} C^*(E)) \xrightarrow{H(\varphi)} H(f^*(E))$$

(where

$$\varphi : C^*(X) \otimes_{C^*(B)} C^*(E) \longrightarrow C^*(f^*E)$$
$$x \otimes y \longmapsto \pi'^*(x) \cdot f'^*(y)$$

: chain map)

これが isom であることは 2段階に分けて示す.

Step.1 $X = pt$ のとき

このとき, $f^*E = F$

つまり,

$$\theta : \mathrm{Tor}_{C^*(B)}(\mathbb{K}, C^*(E)) \to H^*(F)$$

となっている.

$F \to E \to B$: fibration

に対する Serre s.s. を詳しく調べると θ: isom が分かる.

Step.2 X: 一般のとき

$P \to C^*(E)$: semifree resol$/C^*(B)$ とすると

$\theta = H(\tilde{\theta})$ where $\tilde{\theta} : C^*(X) \otimes_{C^*(B)} P \to C^*(f^*E)$

と書ける. ここで, $\tilde{\theta}$ の両辺に filtration を

$\begin{cases} \cdot\ C^*(X) \otimes_{C^*(B)} P \text{ には } C^*(X) \text{ における degree で} \\ \cdot\ C^*(f^*E) \text{ には Serre s.s. の filtration で} \end{cases}$

入れて, それらの s.s. を比較すると E_1 では

$$E_1\theta : C^*(X) \otimes H(\mathbb{K} \otimes_{C^*(B)} P) \to C^*(X) \otimes H^*(F)$$

となる. Step.1 より, これは isom. //

Rmk 3.4.2

$\mathrm{Tor}_{C^*(B)}(C^*(X), C^*(E))$ に適切に積を定めると, θは graded alg の isom になる.

(non-commutative なので「積」が定まることは非自明)

Cor 3.4.3

$\mathbb{K}$: field of char 0

Thm3.4.1 の状況で

$$\mathrm{Tor}_{A_{PL}(B)}(A_{PL}(X), A_{PL}(E)) \xrightarrow{\cong} H^*(f^*E)$$

proof A_{PL}, Tor, θ の naturality より ok. //

具体例を計算するためには左辺の Tor を計算する必要があるが, 次の理由からこれは難しい.

$\begin{cases} ① \text{ そもそも } C^*(-) \text{ や } A_{PL}(-) \text{ が難しい} \\ ② \text{ semifree resol が分からない} \end{cases}$

解決策

① $A_{PL}(-)$ を Sullivan model でおきかえる

② relative Sullivan model を使って semifree resol が (比較的) 容易につくれる

→ §4 で詳しく扱う

ちなみに, ① の解決策として次も有る:

Thm 3.4.4 (Eilenberg-Moore)

$\mathbb{K}$: field (of $\forall$char)

(R, d) : dga with $\begin{cases} H^0(R,d) \cong \mathbb{K} \\ H^1(R,d) = 0 \end{cases}$

(M, d) : non-negative right (R,d)-mod

(N, d) : 〃 left 〃

Then

$\exists \{E_r^{pq}, d_r\}$: spectral sequence s.t.

$$E_2^{pq} = \mathrm{Tor}^{pq}_{H(R)}(H(M), H(N)) \Rightarrow \mathrm{Tor}_R^{p+q}(M, N)$$

Rmk 3.4.5

(R,d) に対する 1-conn の仮定は s.s. の収束性において必要. (なくても頑張ればできるかもしれないけど…)

§4. Sullivan algebras

§4.0 Intro.

§2 で $A_{PL}(X)$ (for X: top. sp.) を構成したが、これは非常に複雑であった。
そこで、これと quasi-isom で「簡単な」cdga にとりかえることを考えたい。

ここで、一般に (A,d) : cdga が「複雑」になる理由として、以下の２つが挙げられる：

- (a) A の積が複雑
- (b) d が複雑

(A,d) を quasi-isom の範囲でとりかえて (a) を解消したものが Sullivan model である。

Rmk
(b) は一般には解消できない ($d=0$)
← formality.

§4.1 Definition & examples of Sullivan algebras

Def 4.1.1

Sullivan algebra とは、

$(\Lambda V, d)$: dga

であって、

- $V = V^{\geq 1}$ (i.e. $\forall i \leq 0$. $V^i = 0$)
- $\exists$ $0 = V(-1) \subset V(0) \subset V(1) \subset \cdots \subset V$: increasing seq. of graded subsp's
  s.t. $\cdot$ $V = \bigcup_k V(k)$
  $\cdot$ $d(V(k)) \subset \Lambda V(k-1)$ $(\forall k \geq 0)$

をみたすもの。

Rmk 4.1.2

- V の filtration $\{V(k)\}$ は "equipped with" ではなく、"exists" である
- $d(V(0)) \subset (\Lambda V(-1))^{\geq 2} = (\mathbb{K})^{\geq 2} = 0$
- 「積は非常に簡単だが、微分が複雑かもしれない cdga」と言える。

Example 4.1.3

V : graded $\mathbb{K}$-mod with $V = V^{\geq 1}$ に対し、

$(\Lambda V, 0)$: Sullivan alg.

(i.e. ΛV に $d=0$ で微分を定めたもの)

である

(∵ $V(0) = V$ とすれば ok)

Example 4.1.4 (spheres)

$n \in \mathbb{N}_{>0}$ とする。

(1) $(\Lambda(v), 0)$ $(|v| = 2n+1)$

は、Example 4.1.3 より Sullivan algebra で、

$H(\Lambda(v), 0) \cong H^*(S^{2n+1})$ as graded alg.

となる

(2) $(\Lambda(v,w), d)$: dga を

- $|v| = 2n$, $|w| = 4n-1$
- $dv = 0$, $dw = v^2$

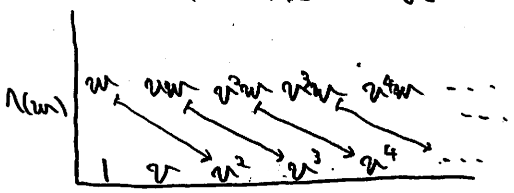
により定めると、filtration

$0 \subset \mathbb{K}\{v\} \subset \mathbb{K}\{v, w\}$

により、これは Sullivan alg. となる。
このとき、

$H(\Lambda(v,w), d) \cong H^*(S^{2n})$ as graded alg.

(∵ $\Lambda(v,w) = \Lambda(v) \otimes \Lambda(w)$ により
微分を図示すると、下図のようになる：



)

Example 4.1.5 (counterexample)

$(\Lambda(v_1, v_2, v_3), d)$: dga を

- $|v_1| = |v_2| = |v_3| = 1$
- $dv_1 = v_2 v_3$, $dv_2 = v_3 v_1$, $dv_3 = v_1 v_2$

により def すると、これは Sullivan algebra では無い。

Example 4.1.6 (not minimal)

$n \in \mathbb{N}_{>0}$ に対し,

$(\Lambda(v,w),d)$: dga

を

- $|v| = n$, $|w| = n+1$
- $dv = w$, $dw = 0$

によって定めるとこれは Sullivan alg. である
以下,これを

$(\Lambda(v,dv),d)$

と書くことにする.
ここで augmentation

$$\varepsilon : (\Lambda(v,dv),d) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{K} : \text{dga hom}$$
$$v \longmapsto 0$$
$$dv \longmapsto 0$$

を考えると,これは quasi-isom である.

また,より一般に

V : graded $\mathbb{K}$-mod with $V = V^{\geq 1}$

に対して

(EV,d) : Sullivan alg ← "contractible"

を

- dV : graded $\mathbb{K}$-mod defined by $(dV)^n := V^{n-1}$ ($dv \longleftarrow v$)
- $EV := \Lambda(V \oplus dV)$
- $d : EV \longrightarrow EV$
  $v \in V \longmapsto dv \in dV$
  $dv \in dV \longmapsto 0$

により定めると,

$$\varepsilon : (EV,d) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{K} : \text{quasi-isom of dga}$$
$$v \longmapsto 0$$
$$dv \longmapsto 0$$

となる

つまり,
「$\mathbb{K}$ ($=(\Lambda(0),0)$: Sullivan alg) と quasi-isom な Sullivan alg がたくさんある」
ということが分かった
これらの中から「一番簡単な」$\mathbb{K}$ のみをとり出したい
⇝ 次の def

Def 4.1.7

$(\Lambda V,d)$: Sullivan alg が <u>minimal</u>
$\overset{\text{def}}{\iff}$ $dV \subset \Lambda^{\geq 2}V$

⇝ Example 4.1.3, Example 4.1.4 (1)(2) の Sullivan alg はいずれも minimal であるが,
Example 4.1.6 の Sullivan alg. は $\mathbb{K}$ を除いて minimal ではない.

Example 4.1.8 (色々と教育的な例)

$(\Lambda V,d) := (\Lambda(a,b,x,y,z),d)$: Sullivan algebra を

- $|a|=|b|=2$, $|x|=|y|=|z|=3$
- $da=db=0$, $dx=a^2$, $dy=ab$, $dz=b^2$

により定める.
これについて,次のような問題が考えられる:

① $H(\Lambda V,d) = \bigoplus_i H^i(\Lambda V,d)$ は fin dim か?
さらに,$H(\Lambda V,d)$ を計算する
② $(\Lambda V,d)$ は formal か?
(i.e. $(\Lambda V,d) \xrightarrow{\simeq} (H(\Lambda V,d),0)$: quasi-isom であるか?)
③ 幾何的に実現されるか?

補足:

① explicit に Sullivan alg が与えられているので
「原理的には」$H(\Lambda V,d)$ が計算できる.
しかし,<u>直接計算</u>はかなり大変
<u>解決策</u>
(a) spectral sequence を使う.
例えば,a のべきで filtration を入れる.
(b) elliptic Sullivan algebra の一般論を用いる
⇝ $H(\Lambda V,d) = H^{\leq 7}(\Lambda V,d)$ が「一瞬で」分かる.

ちなみに

$H(\Lambda V,d) = \mathbb{K}\{1,[a],[b],[ay-bx],[by-az],[aby-b^2x]\}$ as graded $\mathbb{K}$-mod

② ・minimal Sullivan model of $(H(\Lambda V,d),0)$ を途中まで計算する
or
・Massey 積を計算する.
⇝ formal でないことが分かる.
③ §5 で扱う

§4.2 Sullivan models　"cofibrant replacement"

Def 4.2.1

・(A,d): cdga に対し、その **Sullivan model** とは

$$m:(\Lambda V,d)\xrightarrow{\simeq}(A,d):\text{quasi-isom}$$

s.t. $(\Lambda V,d)$: Sullivan alg.

のこと。

・とくに

$(\Lambda V,d)$: minimal Sullivan alg.

のとき、**minimal Sullivan model** という

・X: 0-conn. top. sp の (minimal) Sullivan model とは、$A_{PL}(X)$ の (minimal) Sullivan model のこと

Example 4.2.2

Example 4.1.4 (1)(2) は、それぞれ $A_{PL}(S^{2n+1})$, $A_{PL}(S^{2n})$ の min. Sullivan model になっている

Prop 4.2.3

$\forall(A,d)$: cdga with $H^0(A)=\mathbb{K}$

$\exists m:(\Lambda V,d)\xrightarrow{\simeq}(A,d)$: Sullivan model

proof semifree resol のときと同様に、
$H(A,d)$ の generator をとって、Ker をつぶして、Ker をつぶして、Ker をつぶして、…
とすればよい
(ただし、$V=V^{\geq 1}$ をみたすようにするために、$\mathbb{K}$: field を使って丁寧にやる必要がある)

Thm 4.2.4

$\forall(A,d)$: cdga with $H^0(A)=\mathbb{K}$

$\exists m:(\Lambda V,d)\xrightarrow{\simeq}(A,d)$: minimal Sullivan model

proof

・$H^1(A)=0$ のときは、Prop 4.2.3 のときと同様の構成を V の degree について inductive に行うことで、min. Sullivan model がつくれる
(詳細は Example 4.2.5 で)　"killing homotopy" みたいな感じ

・$H^1(A)\neq 0$ のときは、Prop 4.2.3 を経由して示す

$$\Big(\underset{\text{isom}}{(\Lambda V,d)\cong}\ \underbrace{(\Lambda W,d)}_{\text{minimal}}\otimes\underbrace{(\Lambda U,d)}_{\text{contractible}}\Big)$$

ちゃんとやるのは結構大変

Example 4.2.5

$S^3\vee S^3\vee S^5$ の minimal Sullivan model を(途中まで)計算してみる。

方針は以下の通り:

$m_k:(\Lambda V^{\leq k},d)\to A_{PL}(S^3\vee S^3\vee S^5)$

を k について inductive に作っていく。

V^k の元は次の2通り:

① $H^k(m_{k-1}):H^k(\Lambda V^{\leq k-1})\to H^k(S^3\vee S^3\vee S^5)$ で「足りない分」を V^k で補う。

(i.e. $H^k(S^3\vee S^3\vee S^5)=\mathrm{Im}(H^k(m_{k-1}))\oplus\underbrace{(\text{残り})}_{\text{ここの分}}$)

② $\mathrm{Ker}\,H^{k+1}(m_{k-1})$ をつぶす。

⇝ $H^{k+1}(m_k)$: injective となる。
($\because H^1=0$)

$H^*(S^3\vee S^3\vee S^5)$ の generator$/\mathbb{K}$ を表す cocycle を

$1,\alpha,\beta,\gamma$　($|\alpha|=|\beta|=3$, $|\gamma|=5$)

と書くことにする。

・$V^{\leq 2}=0$

・$V^3=\mathbb{K}\{a,b\}$ ← $H^3(S^3\vee S^3\vee S^5)$ の生成元に対応

$$m_3:(\Lambda(a,b),0)\longrightarrow A_{PL}(S^3\vee S^3\vee S^5)$$
$$a\longmapsto\alpha$$
$$b\longmapsto\beta$$

⇝ $H^{\leq 4}(m_3)$: isom, $H^5(m_3)$: inj

・$V^4=0$

・$V^5=\mathbb{K}\{c,x\}$, $dc=0$, $dx=ab$

$$m_5:(\Lambda(a,b,c,x),d)\longmapsto A_{PL}(S^3\vee S^3\vee S^5)$$
$$c\longmapsto\gamma$$
$$x\longmapsto\exists\,\eta\overset{d}{\longmapsto}\alpha\beta\quad(\because [\alpha\beta]=0)$$

⇝ $H^{\leq 7}(m_5)$: isom, $H^8(m_5)$: not inj

・$V^6=0$

・$V^7\neq 0$ ← $\mathrm{Ker}\,H^8(m_7)$ をつぶす

⋮

これを(無限回)くり返すことで、$S^3\vee S^3\vee S^5$ の min. Sullivan model がつくれる

ちなみに、この例ではこの計算は有限回では終わらない
(i.e. $\dim V=\infty$)　(by Hopf alg の構造定理)

Example 4.2.6

fin. type H-space の min. Sullivan model は $(\Lambda V,0)$ の形。

§4.3 Lifting properties & uniqueness of models

Def 4.3.1

・$(\Lambda(t,dt),d)$: cdga を $|t|=0$, $|dt|=1$ により定める

・$(A,d),(B,d)$: cdga
$\varphi_0,\varphi_1 : (A,d)\to(B,d)$: hom of dga に対し、

$\varphi_0\simeq\varphi_1$: homotopic

$\overset{\text{def}}{\iff}$ [∃$\Phi : (A,d)\to(B,d)\otimes(\Lambda(t,dt),d)$: dga hom

s.t.
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dr, "\varphi_i"'] & B\otimes\Lambda(t,dt) \arrow[d, "id\cdot\varepsilon_i"] \\ & B \end{tikzcd} \quad (\text{for } i=0,1)$$
]

(where
$\varepsilon_i : (\Lambda(t,dt),d)\to\mathbb{k}$ $(i=0,1)$
$t\longmapsto i$
$dt\longmapsto 0$)

Rmk 4.3.2

・何となく conti. map の homotopy の "dual" っぽい
($\Lambda(t,dt)$ が $[0,1]$ に対応?)

・$(B,d)\otimes(\Lambda(t,dt),d)$ が (B,d) の path object.

・上の意味で homotopic なら、chain map としても homotopic

Prop 4.3.3

・上で def した $\simeq$ は、
反射律 ($\varphi\simeq\varphi$), 対称律 ($\varphi\simeq\psi\Rightarrow\psi\simeq\varphi$)
をみたす。

・$(A,d)=(\Lambda V,d)$: Sullivan alg. なら
推移律 ($\varphi\simeq\psi$, $\psi\simeq\chi\Rightarrow\varphi\simeq\chi$)
もみたし、$\simeq$ は equiv. rel になる。

Proof 前半は容易。
後半は、Sullivan alg の surj. quasi-isom に対する strict な lifting property を使って頑張る (Prop 4.3.5) //

Rmk 4.3.4

model cat の一般論での homotopy もこんな感じだった
Sullivan alg. は cofibrant っぽい。

Prop 4.3.5 (lifting property)

$(\Lambda V,d)$: Sullivan alg. $(A,d),(B,d)$: cdga
$\eta : (A,d)\xrightarrow{\simeq q}(B,d)$: quasi-isom of dga
$\varphi : (\Lambda V,d)\longrightarrow(B,d)$: dga hom.

Then

∃$\psi : (\Lambda V,d)\longrightarrow(A,d)$: dga hom
s.t. $\eta\circ\psi\simeq\varphi$

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[d, "\eta", "\simeq q"'] \\ \Lambda V \arrow[ur, dashed, "\exists\psi"] \arrow[r, "\varphi"'] & B \end{tikzcd}$$

さらに、

・このような ψ は unique up to homotopy
($\Leftrightarrow$ $[\Lambda V, A]\xrightarrow[\eta_*]{\cong}[\Lambda V, B]$ ← homotopy set)

・η が surjective quasi-isom なら、
(strict に) $\eta\circ\psi=\varphi$ となる ψ がとれる。

proof existence のみ示す。

Case 1 η : surj のとき

Sullivan alg. の filtration $\{V(k)\}$ について inductive に作れば良い。

(η : surj. quasi-isom より
[$\forall b\in B$: cocycle, $\exists a\in A$: cocycle s.t. $\eta a=b$]
などが成り立つことが鍵となっている)

Case 2 一般のとき

$\bar\eta : (A,d)\otimes(EB,\delta)\xrightarrow{\simeq q}(B,d)$: surj. quasi-isom
$a\otimes 1\longmapsto\eta a$
$1\otimes b\longmapsto b$
$1\otimes\delta b\longmapsto db$

(where
$(EB,\delta)=(\Lambda(B\oplus\delta B),\delta)$: "contractible"
Bの微分と紛らわしいから、EBの微分は δ で書いた)

このとき、

・Case 1 より $\bar\eta$ については lift できる。

・$(EB,\delta)\simeq\mathbb{k}$: homotopy equiv. なので、
η と $\bar\eta$ は up to homotopy で同じ。

なので、η についても up to homotopy で lift できる。 //

Rmk 4.3.6

cofibrant obj と trivial fibration についての lifting property と思える。

Cor 4.3.7

> X, Y: 0-conn. top. sp., $f: X \to Y$: conti.
> $m: (\Lambda V, d) \xrightarrow{\simeq} A_{PL}(X)$
> $n: (\Lambda W, d) \xrightarrow{\simeq} A_{PL}(Y)$: Sullivan models
>
> **Then**
>
> $$\begin{tikzcd} A_{PL}(Y) \arrow[r, "f^*"] & A_{PL}(X) \\ \Lambda W \arrow[u, "n"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft_h"] \arrow[r, dashed, "\exists \varphi"'] & \Lambda V \arrow[u, "m"'] \end{tikzcd}$$
>
> : homotopy commutative

$\rightsquigarrow$ f^* の代わりに φ を扱えばよい。

Cor 4.3.8 (uniqueness)

> (A, d): cdga with $H^0(A) = \mathbb{K}$
> に対し、その Sullivan model は
> unique up to homotopy である
> また、quasi-isom な2つの cdga の Sullivan model は homotopy 同値である。

minimal も仮定すると、かなり強いことが言える。

Thm 4.3.9 (uniqueness)

> (A, d): cdga with $H^0(A) = \mathbb{K}$
> に対し、その minimal Sullivan model は
> unique up to isom である
> また、quasi-isom な2つの cdga の minimal Sullivan model は isom である。

Thm 4.3.9 の後半より、
「minimal Sullivan model は
quasi-isom invariant である」
と言える。

一般に、
(A, d), (B, d): cdga with $H(A, d) \cong H(B, d)$ as alg.
が与えられたときに
$(A, d) \not\simeq (B, d)$: NOT quasi-isom
であることは難しいが、min. Sullivan model を
計算するだけでこれができるのである。

Example 4.3.10

> Example 4.1.8 の Sullivan alg. $(\Lambda V, d)$ が formal でないことを、
> minimal Sullivan model of $(\Lambda V, d)$, $(H(\Lambda V, d), 0)$
> を計算することで示せ。
> ($\deg = 4$ で違いが現れる)　← こっちは元々 min Sullivan alg だけど

Thm 4.3.9 より、X: 0-conn. top. sp. に対して
その min. Sullivan model $(\Lambda V, d)$ が up to isom で定まる。
とくに、V: graded $\mathbb{K}$-mod が定まるが、これには
次のような幾何的意味がある：

Thm 4.3.11

> X: 1-conn. top. sp. with $H_*(X; \mathbb{K})$: fin type
> $(\Lambda V, d)$: minimal Sullivan model of X
>
> **Then**
>
> $$V \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\pi_*(X), \mathbb{K})$$

つまり、rational には homotopy 群が $A_{PL}(X)$ から
計算できてしまう

Example 4.3.13 ←(下のやつを先にやるべき)

$n \geq 3$: odd に対し、 (fin type/$\mathbb{Z}$)

$$\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}} \pi_k(S^n \vee S^n) = \begin{cases} a_p & (k = (n-1)p + 1, p \geq 1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

(where
$$a_p = \frac{1}{p} \sum_{d \mid p} \mu\left(\frac{p}{d}\right) 2^d$$
← Möbius function
)

← free Lie alg の次元などと一致している

(☺ $\pi_k(S^n \vee S^n) = \pi_{k-1}(\Omega(S^n \vee S^n))$
$\Omega(S^n \vee S^n) \to P(S^n \vee S^n) \to S^n \vee S^n$: fibration
に Serre s.s. を使って $H^*(\Omega(S^n \vee S^n))$ を求め、
それより $\underbrace{\Omega(S^n \vee S^n)}_{\text{H-space}}$ の min Sullivan model を求める)

Example 4.3.12

$m \geq 1$ に対し、 (fin. type/$\mathbb{Z}$)

$$\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}} \pi_k(S^{2m+1}) = \begin{cases} 1 & (k = 2m+1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

$$\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}} \pi_k(S^{2m}) = \begin{cases} 1 & (k = 2m, 4m-1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

(☺ Example 4.1.4 と Thm 4.3.11)

ちなみに、torsion part は上の方にもたくさん出てくる。

§4.4 relative Sullivan algebras

Def 4.4.1

- relative Sullivan algebra とは
  $(B\otimes\Lambda V, d)$: cdga
  であって
  - $(B,d) = (B\otimes\mathbb{K}, d) \subset (B\otimes\Lambda V, d)$: sub cdga
  - $H^0(B,d) = \mathbb{K}$
  - $V = V^{\geq 1}$
  - $\exists\ 0 = V(-1) \subset V(0) \subset \cdots \subset V$
    s.t. $\begin{cases} V = \bigcup V(k) \\ d(V(k)) \subset B\otimes\Lambda V(k-1) \quad (\forall k) \end{cases}$

  をみたすもの.
- 上に加えて
  $d(V) \subset B^+\otimes\Lambda V + B\otimes\Lambda^{\geq 2}V$
  をみたすとき, minimal という

Def 4.4.2

- $\varphi : (B,d) \to (C,d)$: hom between cdga
  に対し, その (relative) Sullivan model とは
  $m : \underbrace{(B\otimes\Lambda V, d)}_{\text{relative Sullivan alg}} \xrightarrow{\simeq} (C,d)$: quasi-isom
  であって, 下図が可換なもの:

$$\begin{tikzcd} B\otimes\Lambda V \arrow[r, "m"] & C \\ B \arrow[u] \arrow[ur, "\varphi"'] \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft"] & \end{tikzcd}$$

- minimal relative Sullivan model (同様に def)
- cofi. map に対する relative Sullivan model

Thm 4.4.3

$\varphi : (B,d) \to (C,d)$: hom between cdga
with $H^0B = H^0C = \mathbb{K}$, $H^1\varphi$: inj
Then
φ は minimal relative Sullivan model をもつ.

proof Thm 4.2.4 と同様.
(inductive な構成は, 次の状況でできる:
$B^0 = C^0 = \mathbb{K}$, $B^1 = C^1 = 0$, $H^2\varphi$: inj.)
//

Rmk 4.4.4

relative Sullivan algebra についても, (minimal) rel. Sullivan model の uniqueness や lifting property が (適切な修正の下で) 成り立つ.

Prop 4.4.5

$(B\otimes\Lambda V, d)$: rel. Sullivan alg.
とすると,
$(B\otimes\Lambda V, d)$: semifree (B,d)-mod
である.

proof
ΛV に ($\mathbb{K}$-mod として) filtration を
$\begin{cases} V \text{ に入っている rel. Sullivan alg としての filtration} \\ \text{length } (\Lambda^k V \text{ の } k) \end{cases}$
を合わせる形で入れればよい
(explicit には書きにくい)
//

まとめ

cdga hom によって module str. を入れている場合は, relative Sullivan model が semifree resolution になっている.
しかも, Thm 4.4.3 の proof より rel. Sullivan model は Example 4.2.5 と同様にして計算できる.
↪ Tor が計算できる!!

rel. Sullivan alg の具体例は §5 で.

（「有理ホモトピー論入門」の続き）

§5. Calculations

§5.1 Main theorem

Def 5.1.1

X, Y: 0-conn. top. sp. $f: X \to Y$

$m: (\Lambda V, d) \xrightarrow{\simeq_q} A_{PL}(X)$

$n: (\Lambda W, d) \xrightarrow{\simeq_q} A_{PL}(Y)$: Sullivan models

に対し、下図のφを Sullivan representative for f (w.r.t. m, n) という。

$$\begin{tikzcd} A_{PL}(Y) \arrow[r, "f^*"] & A_{PL}(X) \\ \Lambda W \arrow[u, "n", "\simeq_q"'] \arrow[r, "\varphi"] \arrow[ur, phantom, "\sim_h"] & \Lambda V \arrow[u, "m"', "\simeq_q"] \end{tikzcd}$$

（Cor 4.3.7 より存在, unique up to homotopy）

Thm 5.1.2

$F \to E \xrightarrow{\pi} B$: fibration with
- $H^*(F;\Bbbk)$: fin. type/$\Bbbk$
- B: 1-conn., E: 0-conn.

$$\begin{tikzcd} f^*E \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & E \arrow[d, "\pi"] \\ X \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

$f: X \to B$ with X: 0-conn.

とし、右図の pullback を考える。

さらに、下図(*)のような Sullivan models と Sullivan representatives が given とする:

$$(*)\quad \begin{tikzcd} A_{PL}(X) & A_{PL}(B) \arrow[l, "f^*"'] \arrow[r, "\pi^*"] & A_{PL}(E) \\ (\Lambda V_X, d) \arrow[u, "m_X"', "\simeq_q"] \arrow[ur, phantom, "\sim_h"] & (\Lambda V_B, d) \arrow[l, "\varphi"'] \arrow[r, "\psi"] \arrow[u, "m_B"', "\simeq_q"] \arrow[ur, phantom, "\sim_h"] & (\Lambda V_E, d) \arrow[u, "m_E"', "\simeq_q"] \end{tikzcd}$$

Then

$\exists \theta: (\Lambda V_X, d) \otimes_{\Lambda V_B} (\Lambda V_B \otimes \Lambda W, d) \xrightarrow{\simeq_q} A_{PL}(f^*E)$: quasi-isom of cdga

(where $n: (\Lambda V_B \otimes \Lambda W, d) \xrightarrow{\simeq_q} (\Lambda V_E, d)$: rel. Sullivan model for ψ)

proof

Prop 4.4.5 より、

n: semifree resol. of $(\Lambda V_E, d)$ $/(\Lambda V_B, d)$

なので、

$$H((\Lambda V_X, d) \otimes_{\Lambda V_B} (\Lambda V_B \otimes \Lambda W, d)) = \mathrm{Tor}_{\Lambda V_B}((\Lambda V_X, d), (\Lambda V_E, d))$$

である。

ここで、簡単のため(*)が strict に commutative であると仮定すると、Prop 3.3.3 より、

$$\mathrm{Tor}_{m_B}(m_X, m_E) : \mathrm{Tor}_{\Lambda V_B}(\Lambda V_X, \Lambda V_E) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Tor}_{A_{PL}(B)}(A_{PL}(X), A_{PL}(E)) \quad \text{: isom}$$

さらに、Cor 3.4.3 (Eilenberg-Moore) より、

$$\mathrm{Tor}_{A_{PL}(B)}(A_{PL}(X), A_{PL}(E)) \xrightarrow{\cong} H^*(f^*E)$$

よって

$$\mathrm{Tor}_{\Lambda V_B}(\Lambda V_X, \Lambda V_E) \xrightarrow{\cong} H^*(f^*E)$$

（本当は、これが cdga hom が induce するものであることを check する必要がある）

//

Exercise 5.1.3

(*)が homotopy commutative のときに Thm 5.1.2 を示せ。

Hint $\varphi_0 \simeq \varphi_1 : (B, d) \to (C, d)$: cdga hom

$m_i : (B \otimes \Lambda V_i, d) \xrightarrow{\simeq_q} (C, d)$: rel. Sullivan model for φ_i

$\Rightarrow (B \otimes \Lambda V_0, d) \simeq (B \otimes \Lambda V_1, d)$: homotopy equiv. rel. B

Rmk 5.1.4

- Thm 5.1.2 において、ψの代わりに (or と同時に) φの rel. Sullivan model をとってもよい。
- Thm 5.1.2 を使って f, π の Sullivan representative の情報だけで、$H^*(f^*E)$ が計算できる。

§5.2 Example

Prop 5.2.1

$n=1,2,4$ に対し、

$p_n : S^{4n-1} \longrightarrow S^{2n}$: Hopf fibration

とすると、p_n の Sullivan representative として

$$\begin{aligned} \varphi_n : (\Lambda(v,w), d) &\longrightarrow (\Lambda(u), 0) \\ v &\longmapsto 0 \\ w &\longmapsto u \end{aligned}$$

(where
- $(\Lambda(v,w),d)$: Sullivan model for S^{2n}
  $\begin{cases} |v|=2n, & |w|=4n-1, \\ dv=0, & dw=v^2 \end{cases}$
- $(\Lambda(u),d)$: Sullivan model for S^{4n-1}
  $|u|=4n-1$, $du=0$.
)

がとれる。

proof Cor 4.3.7 より Sullivan representative φ' が存在。このとき、degree reason より

$$\begin{aligned} \varphi' : v &\longmapsto 0 \\ w &\longmapsto \lambda u \quad (\exists \lambda \in \mathbb{K}) \end{aligned}$$

ここで、Thm 4.3.11 より下図が書ける：

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}w & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\pi_{4n-1}S^{2n}, \mathbb{K}) \\ \downarrow{\scriptstyle Q\varphi'} & \circlearrowright & \downarrow{\scriptstyle (\pi_{4n-1}p_n)^*} \\ \mathbb{K}u & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\pi_{4n-1}S^{4n-1}, \mathbb{K}) \end{array}$$

さらに、

$(\pi_{4n-1}p_n)^*$: isom

($\because$ p_n のとり方より)

なので、

$Q\varphi'$: isom

よって

$\lambda \neq 0$

$\rightsquigarrow$ u のとり方をかえれば、$\lambda=1$ にできる。 //

Rmk 5.2.2

一般の $n \in \mathbb{N}_{>0}$ に対しても、

$[p_n] \in \pi_{4n-1}(S^{2n})$: generator of free part

とすれば同様のことが言える

Prop 5.2.3

Prop 5.2.1 の φ_n の rel. Sullivan model は

$$\begin{aligned} m_n : (\Lambda(v,w)\otimes\Lambda(y), d) &\xrightarrow{\simeq} (\Lambda(u), 0) \\ v, y &\longmapsto 0. \\ w &\longmapsto u \end{aligned}$$

(where
$|y|=2n-1$, $dy=v$)

proof
- rel. Sullivan alg. であることと
- $\Lambda(v,w)$ 上で φ_n に一致することは明らか。

m_n : quasi-isom なのは

$$\begin{aligned} (E(a),d)\otimes(\Lambda(b),0) &\xrightarrow{\cong} (\Lambda(v,w)\otimes\Lambda(y), d) \\ a &\longmapsto y \qquad : \text{isom} \\ da &\longmapsto v \\ b &\longmapsto w - vy \end{aligned}$$

(where
- $(E(a),d) = (\Lambda(a,da),d)$: contractible alg
  $|a| = 2n-1$
- $|b| = 4n-1$
)

から分かる。 //

Rmk 5.2.4

気持ちとしては、$v=dy$ によって v と y が対になって消えている感じ

Prop 5.2.5

$f: S^2 \times S^2 \to S^2 \wedge S^2 = S^4$ とし、右図の pullback により X を定める。

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & S^7 \arrow[d, "p_2"] \\ S^2 \times S^2 \arrow[r, "f"] & S^4 \end{tikzcd}$$

Then

X の min. Sullivan model は

$(\Lambda(a, b, x, y, z), d)$

(where
- $|a| = |b| = 2$, $|x| = |y| = |z| = 3$
- $da = db = 0$, $dx = a^2$, $dy = ab$, $dz = b^2$)

proof

$S^2 \times S^2$ の Sullivan model として

$(\Lambda(a, b, x, z), d) = (\Lambda(a, x), d) \otimes (\Lambda(b, z), d)$

(where
$|a| = |b| = 2$, $|x| = |z| = 3$,
$dx = a^2$, $dz = b^2$.)

がとれる。

これについての f の Sullivan representative は、

$$\begin{aligned} \psi: (\Lambda(v, w), d) &\longrightarrow (\Lambda(a, b, x, z), d) \\ v &\longmapsto ab \\ w &\longmapsto 0 \end{aligned}$$

(∵ f は基本類を保つので、
$\psi(v) = ab$.
(本当は modulo $\overset{dx}{a^2}, \overset{dz}{b^2}$ だから、もう少し議論が要るけど…)
degree reason より
$\psi(w) = 0$.)

よって、Thm 5.1.2 と Prop 5.2.1, Prop 5.2.3 より X の Sullivan model として

$$(\Lambda(a, b, x, z), d) \otimes_{\Lambda(v, w)} (\Lambda(v, w) \otimes \Lambda(y), d)$$
$$\cong (\Lambda(a, b, x, z, y), d)$$

がとれる。このとき、tensor のとり方から、

$dy = \psi(v) = ab$

である。 //

$\hookrightarrow$ Example 4.1.8 の幾何的実現

§5.3 Loop spaces

以下、

X : 1-conn. top. sp. with $H^*(X;\mathbb{K})$: fin. type/$\mathbb{K}$

とする

Def 5.3.1

- $X^I = \{\gamma : I \to X : \text{conti.}\}$

  cpt-open top. により top. sp.

- $LX = \{\gamma : I \to X \mid \gamma(0) = \gamma(1)\} \underset{\text{subsp.}}{<} X^I$

  : free loop space

- $\Omega X = \Omega(X, x_0) = \{\gamma : I \to X \mid \gamma(0) = \gamma(1) = x_0\}$
  (where $x_0 \in X$: fix) $< X^I$

  : (based) loop space

Prop 5.3.2

(1) 右図のような fibration の pullback がある。

(where
$p : X^I \longrightarrow X \times X$
$\gamma \longmapsto (\gamma(0), \gamma(1))$
$\Delta : X \longrightarrow X \times X$
$x \longmapsto (x, x)$)

$$\begin{tikzcd} LX \arrow[r] \arrow[d, "ev_0"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & X^I \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "\Delta"] & X \times X \end{tikzcd}$$

(2) $c : X \xrightarrow{\simeq} X^I$: homotopy equiv.
$x \longmapsto$ (const. path at x)

さらに、右図は可換

$$\begin{tikzcd} X^I \arrow[d, "p"'] & X \arrow[l, "c"', "\simeq"] \arrow[dl, "\Delta"] \\ X \times X \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & \end{tikzcd}$$

proof 明らか。 //

この pullback に Thm 5.1.2 を適用したい。

$m : (\Lambda V, d) \xrightarrow{\simeq} A_{PL}(X)$

: min. Sullivan model for X

とする

Prop 5.3.3

(1) $\exists m' : (\Lambda V, d)^{\otimes 2} \xrightarrow{\simeq} A_{PL}(X \times X)$

: min. Sullivan model

(2) $\mu : (\Lambda V, d)^{\otimes 2} \longrightarrow (\Lambda V, d)$: multiplication

は Δ, p 両方の Sullivan representative になっている

proof (1) Künneth thm.

(2) Δ の Sullivan rep. になっているのは、$A_{PL}(X)$ における積が

$$A_{PL}(X)^{\otimes 2} \xrightarrow[\simeq]{\times} A_{PL}(X \times X) \xrightarrow{\Delta^*} A_{PL}(X)$$
$$a \otimes b \longmapsto pr_1^* a \cdot pr_2^* b$$

と書けることから分かる。

p は up to homotopy で Δ と思えるので、p についても ok. //

Prop 5.3.4

$(\Lambda V^{\otimes 2} \otimes \Lambda W, d) \xrightarrow{\simeq} (\Lambda V, d)$

: rel. Sullivan model for μ

とすると、

$$(\Lambda V, d) \underset{\Lambda V^{\otimes 2}}{\otimes} (\Lambda V^{\otimes 2} \otimes \Lambda W, d) \xrightarrow[\exists]{\simeq} A_{PL}(LX)$$

: quasi-isom of cdga

proof Prop 5.3.2 (1) の pullback に Thm 5.1.2 を適用すればよい。 //

よって、μ の rel. Sullivan model さえ記述できれば $H^*(LX)$ が計算できる。

以下の議論は詳細までやろうとすると結構大変なので、概略のみ記す

Def & Prop 5.3.5

$(\Lambda V^{\otimes 2}\otimes \Lambda \bar V, d)$: rel. Sullivan alg $/(\Lambda V,d)^{\otimes 2}$ を

- $\bar V^n := V^{n+1}$, $\bar v \longleftrightarrow v$
- $\bar v \in \bar V$ に対し、

各 v に対し有限和になる

$$d\bar v := 1\otimes v - v\otimes 1 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(s'd)^n}{n!}(v\otimes 1)$$

where

$s' : \Lambda V^{\otimes 2}\otimes \Lambda\bar V \longrightarrow \Lambda V^{\otimes 2}\otimes\Lambda\bar V$: derivation of deg (-1)

$v\otimes 1 \longmapsto \bar v$

$1\otimes v \longmapsto \bar v$

$\bar v \longmapsto 0$

により定める(ことができる)

($\Lambda V^{\otimes 2}\otimes\Lambda\bar V = \Lambda V\otimes\Lambda V\otimes\Lambda\bar V$ の元 $v\otimes 1\otimes 1$, $1\otimes v\otimes 1$, $1\otimes 1\otimes \bar v$ をそれぞれ $v\otimes 1$, $1\otimes v$, $\bar v$ と略記した)

Prop 5.3.6

$\mu : (\Lambda V^{\otimes 2}\otimes\Lambda\bar V, d) \xrightarrow{\simeq} (\Lambda V, d)$

$v\otimes 1 \longmapsto v$

$1\otimes v \longmapsto v$

$\bar v \longmapsto 0$

: rel. Sullivan model for μ

Prop 5.3.7

$(\Lambda V\otimes\Lambda\bar V, d) := (\Lambda V, d)\otimes_{\Lambda V^{\otimes 2}}(\Lambda V^{\otimes 2}\otimes\Lambda\bar V, d)$

の differential は、次のようにして記述できる:

$s : \Lambda V\otimes\Lambda\bar V \longrightarrow \Lambda V\otimes\Lambda\bar V$: derivation of deg (-1)

$v \longmapsto \bar v$

$\bar v \longmapsto 0$

について、

$$ds = -sd$$

が成立. (とくに、$d\bar v = dsv = -sdv$)

以上のまとめとして次を得る:

Thm 5.3.8

X : 1-conn. top. sp. with $H^*(X;\mathbb{K})$: fin. type$/\mathbb{K}$

$(\Lambda V, d)$: min. Sullivan model for X

に対し、

$(\Lambda V\otimes\Lambda\bar V, d)$: rel. Sullivan alg $/(\Lambda V, d)$

を

$d\bar v := -s\,dv$ (where s: Prop 5.3.7 のもの)

と定めると、

$(\Lambda V\otimes\Lambda\bar V, d)$: min. Sullivan model for LX

である

Cor 5.3.9

Thm 5.3.8 の状況で、

$(\Lambda\bar V, 0)$: min. Sullivan model for ΩX

proof

右の pullback に Thm 5.1.2, Thm 5.3.8 を使えばよい.

$$\begin{tikzcd} \Omega X \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & LX \arrow[d] \\ pt \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

Example 5.3.10

$H^*(LS^k)$ を計算する.

(1) $k=2n+1$: odd のとき

$(\Lambda V, d) = (\Lambda x, 0)$ $(|x| = 2n+1)$

$(\Lambda V\otimes\Lambda\bar V, d) = (\Lambda(x,\bar x), d)$ $(|\bar x| = 2n)$

$dx = 0$, $d\bar x = -s\,dx = 0$

よって

$$H^*(LS^{2n+1}) \cong H(\Lambda(x,\bar x), 0) \cong \Lambda(x,\bar x) \cong H^*(S^{2n+1})\otimes H^*(\Omega S^{2n+1})$$

(2) $k=2n$: even のとき

$(\Lambda V, d) = (\Lambda(x,y), d)$ $\left(\begin{array}{l}|x|=2n,\ |y|=4n-1,\\ dx=0,\ dy=x^2\end{array}\right)$

$(\Lambda V\otimes\Lambda\bar V, d) = (\Lambda(x,y,\bar x,\bar y), d)$

$$\begin{cases} dx = 0,\ dy = x^2,\ d\bar x = -s\,dx = 0 \\ d\bar y = -s\,dy = -s(x^2) = -2x\bar x \end{cases}$$

よって、$\mathbb{K}$-vect. sp. として

$$H^*(LS^{2n}) \cong \mathbb{K}\{1, [x], [\bar x\bar y^g], [x\bar y^{g+1} + 2(g+1)y\bar x\bar y^g]\}$$

(degree 0, $2n$, $2n-1+g(4n-2)$, $2n+(g+1)(4n-2)$)

$$\not\cong H^*(S^{2n})\otimes H^*(\Omega S^{2n})$$

ゆえに、$H^*(LS^{2n})$ において

- 積は自明である
- Massey 積 はたくさん生きている

ことが分かる

§6. Elliptic Sullivan algebras

§6.0 Introduction

Def 6.0.1

X : 1-conn top. sp. with $H^*(X;\mathbb{K})$: fin. dim について.

- X : (rationally) elliptic $\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\pi_*(X)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{K}$: fin. dim.
- X : (rationally) hyperbolic $\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\pi_*(X)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{K}$: infin. dim.

Example 6.0.2

(1) sphere S^k ($k \geq 2$) は elliptic

(2) 1-conn. Lie grp や 1-conn. homogeneous space は elliptic.

(∵) G : Lie grp に対し、Hopf alg. の str. thm より

$$H^*(G;\mathbb{K}) \cong \Lambda(x_1,\dots,x_n) \quad \text{with } |x_i| : \text{odd}$$

なので、

$$\pi_*(G)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{K} \cong \mathbb{K}\{x_1,\dots,x_n\} : \text{fin dim.}$$

homogeneous space については

$$H \to G \to G/H$$

に対する homotopy 群の long exact seq. より OK.

(3) $S^n \vee S^n$ (for $n \geq 3$: odd) は hyperbolic (∵ Example 4.3.13)

Question 6.0.3

$\#\mathbb{C}P^2$ は elliptic か?
(i.e. $\pi_*(\#\mathbb{C}P^2)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{K}$: fin. dim. ?)

§6.1 の Thm を使って分かる

今回は elliptic spaces の性質を色々紹介するが、その前に hyperbolic spaces の性質を1つだけ。

Thm 6.0.4 (Félix - Halperin - Thomas, 2009) ← ann. of math.

X : hyperbolic finite CW cpx

$n := \dim X$

$\alpha := \limsup_i \left(\frac{1}{i}\log(\operatorname{rank}\pi_i(X))\right)$

Then

- $0 < \alpha < \infty$
- $\forall \varepsilon > 0, \exists K \in \mathbb{N}, \forall k \geq K$

$$e^{(\alpha-\varepsilon)k} \leq \sum_{i=k+2}^{k+n} \operatorname{rank}\pi_i(X) \leq e^{(\alpha+\varepsilon)k}$$

§6.1 Properties of elliptic Sullivan algebras

§4 より、spaces の代わりに minimal Sullivan algs を調べればよい.

Def 6.1.1

$(\Lambda V, d)$: minimal Sullivan alg に対し、

$(\Lambda V, d)$: elliptic $\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ V, $H^*(\Lambda V, d)$: fin. dim.

Def 6.1.2

$(\Lambda V, d)$: Sullivan alg with V : fin. dim. に対し basis をとって

$$\begin{cases} V^{\text{even}} = \mathbb{K}\{x_1,\dots,x_p\} \\ V^{\text{odd}} = \mathbb{K}\{y_1,\dots,y_q\} \end{cases}$$

と書き、

$$|x_i| = 2a_i, \quad |y_j| = 2b_j - 1$$

とおく。このとき

$$\begin{cases} a_1,\dots,a_p : \text{even exponent} \\ b_1,\dots,b_q : \text{odd exponent} \end{cases}$$

という.

Def 6.1.3

(A, d) : dga に対し、formal dimension

$$\operatorname{fdim}(A,d) := \max\{n \mid H^n(A,d) \neq 0\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

Thm 6.1.4 (Friedlander-Halperin, 1979)

$(\Lambda V, d)$: 1-conn. elliptic Sullivan alg.
$\{a_i\}, \{b_j\}$: exponents
$n := \mathrm{fdim}(\Lambda V, d)$ $(<\infty)$

Then

(1) $n = \sum_{j=1}^{q}(2b_j - 1) - \sum_{i=1}^{p}(2a_i - 1)$

(2) $\sum_{i=1}^{p} 2a_i \leq n$

(3) $\sum_{j=1}^{q}(2b_j - 1) \leq 2n - 1$

(4) $p \leq q$ (i.e. $\dim V^{even} \leq \dim V^{odd}$)

証明の idea を述べるために、pure Sullivan alg というものを導入する。

Def 6.1.5

$(\Lambda V, d)$: Sullivan alg with V: fin. dim について、
$(\Lambda V, d)$: pure
$\overset{\text{def}}{\iff}$ $d(V^{even}) = 0$, $d(V^{odd}) \subset \Lambda(V^{even})$

Def 6.1.6

$(\Lambda V, d)$: Sullivan alg with V: fin. dim に対し、その微分を修正した
$(\Lambda V, d_\sigma)$: pure Sullivan alg associated with $(\Lambda V, d)$
を、次により def:

- $d_\sigma(V^{even}) = 0$
- $d_\sigma(V^{odd}) \subset \Lambda(V^{even})$
  $(d - d_\sigma)(V^{odd}) \subset \Lambda(V^{even}) \otimes \Lambda^+(V^{odd})$

Prop 6.1.7

$(\Lambda V, d)$: 1-conn. min. Sullivan alg with V: fin. dim に対し、
$H(\Lambda V, d)$: fin. dim $\Leftrightarrow$ $H(\Lambda V, d_\sigma)$: fin. dim
が成立。さらに、このとき
$\mathrm{fdim}(\Lambda V, d) = \mathrm{fdim}(\Lambda V, d_\sigma)$ $(<\infty)$
が成立。

proof

V^{odd} に関する length で $(\Lambda V, d)$ に filtration を入れると、
$(E_0, d_0) = (\Lambda V, d_\sigma) \Longrightarrow H(\Lambda V, d)$
なる形の収束する spectral seq. が得られる。
(1st quadrant ではないが bounded)
これによって前半の $(\Leftarrow)$ は分かる
$(\Rightarrow)$ は、L.S cat. とか、その "mapping theorem" とかを使うので、結構難しい。
(ちなみに、minimal が本質的に必要)
後半は induction on $\dim V$ で頑張る。 //

idea of proof of Thm 6.1.4

$(\Lambda V, d)$ と $(\Lambda V, d_\sigma)$ で exponents が変わらないことに注意すると、Prop 6.1.7 より、$(\Lambda V, d)$ が pure の場合に帰着される
pure Sullivan alg は、非常に特殊な形をしていて扱い易く、頑張って調べれば Thm 6.1.4 が示せる。 //

pure Sullivan alg の重要な性質として、次がある:

Prop 6.1.8

$(\Lambda V, d)$: pure Sullivan alg.
$V^{even} = \mathbb{K}\{x_1, \cdots, x_p\}$
Then
$H(\Lambda V, d)$: fin. dim.
$\iff \left[\begin{array}{l} 1 \leq \forall i \leq p, \ \exists N_i \in \mathbb{N} \\ \text{s.t. } [x_i]^{N_i} = 0 \in H(\Lambda V, d) \end{array} \right.$

§6.2 Criterions

2種類の状況

- (1) $H^*(X;\mathbb{K}) \cong H(\Lambda V, d)$ が known のとき
- (2) $\pi_* X \otimes \mathbb{K} \cong V$ が known のとき

で、elliptic かどうかの判定法を与える。
両方とも有限時間で判定できる

Thm 6.2.1

(A,d) : cdga with $\begin{cases} H^1(A,d)=0 \\ H^*(A,d) : \text{fin. dim.} \end{cases}$ に対し、

$(\Lambda V,d)$: min. Sullivan model for (A,d)

を、Example 4.2.5 の方法によって inductive に構成する。
このとき、この構成の途中(有限 step)で次のいずれか一方が起こる:

(a) induction が有限回で終わる。
$\left(\text{i.e. } \exists k,\ (\Lambda(V^{\le k}),d) \xrightarrow{\simeq} (A,d)\right)$
このとき、$(\Lambda V,d)$: elliptic

(b) $\begin{cases} \cdot \text{ even deg の生成元の deg の総和が } n \text{ を超える} \\ \text{or} \\ \cdot \text{ odd deg ―― 〃 ―― } 2n-1 \text{ 〃} \end{cases}$
(where $n := \mathrm{fdim}(A,d) < \infty$)
このとき、$(\Lambda V,d)$: not elliptic
(i.e. $\dim V = \infty$) (hyperbolic)

Thm 6.2.2

$(\Lambda V,d)$: 1-conn. min. Sullivan alg with V : fin. dim.
$V^{even} = \mathbb{K}\{x_1, \cdots, x_q\}$
$a_1, \cdots, a_p, b_1, \cdots, b_q$: exponents

$$n := \sum_{j=1}^{q}(2b_j - 1) - \sum_{i=1}^{p}(2a_i - 1) \quad (\text{と def.})$$

各 i に対し $N_i \in \mathbb{N}$ を
$2N_i a_i > n$
となるように(任意に)とって fix する。

Then
$(\Lambda V,d)$: elliptic (i.e. $H(\Lambda V,d)$: fin. dim)
$\iff 1 \le \forall i \le p,\ [x_i]^{N_i} = 0 \in H^{2N_i a_i}(\Lambda V, d_\sigma)$
さらに、このとき $n = \mathrm{fdim}(\Lambda V,d)$ である。

いずれも、§6.1 の Thm, Prop からすぐに分かる。

§6.3 Examples

Example 6.3.1

Example 4.1.8 の Sullivan alg の cohomology を計算する。

$(\Lambda V,d) := (\Lambda(a,b,x,y,z), d)$

$\left(\begin{array}{l} \text{where} \\ |a|=|b|=2,\ |x|=|y|=|z|=3 \\ da=db=0,\ dx=a^2,\ dy=ab,\ dz=b^2 \end{array}\right)$

$(\Lambda V,d)$: pure で、

$\begin{cases} \cdot\ V^{even} = \mathbb{K}\{a,b\} \\ \cdot\ [a]^2 = [dx] = 0,\ [b]^2 = [dz] = 0 \end{cases}$

なので、Prop 6.1.8 (or Thm 6.2.2) より、

$H(\Lambda V,d)$: fin dim. (i.e. $(\Lambda V,d)$: elliptic)

よって、Thm 6.1.4(1) (or Thm 6.2.2) より、

$\mathrm{fdim}(\Lambda V,d) = 3+3+3-(2-1)-(2-1) = 7$

なので、

$H^*(\Lambda V,d) = H^{\le 7}(\Lambda V,d)$

deg	2	3	4	5	6	7	(8)
	a	$x \mapsto a^2$		$bx-ay$		a^2z-aby	
	b	$y \mapsto ab$		$az-by$		$aby \longmapsto a^2b^2$	
		$z \mapsto b^2$		$bx \longmapsto a^2b$		$a^2y \longmapsto a^3b$	
				$az \longmapsto ab^2$		$b^2y \longmapsto ab^3$	
				$ax \longmapsto a^3$		$a^2x \longmapsto a^4$	
				$bz \longmapsto b^3$		$b^2z \longmapsto b^4$	
					$xy \mapsto a^2y-abx$		$\vdots$
					$zy \mapsto b^2y-abz$		
					$xz \mapsto a^2z-b^2y$		

上図より、

$$H^*(\Lambda V,d) = \mathbb{K}\{1, [a], [b], [bx-ay], [az-by], [a^2z-aby]\}$$

となることが分かる。

Question 6.0.3 に解答を与えたい.

Prop 6.3.2

$$\boxed{\begin{aligned}&\left(\overset{k}{\#}\mathbb{C}P^2\right)\#\left(\overset{l}{\#}\overline{\mathbb{C}P^2}\right) : \text{elliptic}\\ &\Leftrightarrow\ k+l\le 2\end{aligned}}$$

proof

$k+l=1$ のとき

$$\left(\Lambda(x,y),\ dx=0,\ dy=x^3\right)\xrightarrow{\simeq^2}A_{PL}(\mathbb{C}P^2)$$
deg 2 5 $\qquad A_{PL}(\overline{\mathbb{C}P^2})$

なので, elliptic.

$k+l=2$ のとき

$(\Lambda V,d):=(\Lambda(x_1,x_2,z,w),d)$

$\left(\begin{aligned}\text{where }&|x_1|=|x_2|=2,\ |z|=|w|=3\\ &dx_1=dx_2=0,\ dz=x_1x_2,\ dw=x_1^2+x_2^2\end{aligned}\right)$

と定めると. これは pure で

$$\begin{cases}x_1^3=d(x_1w-x_2z)\\ x_2^3=d(x_2w-x_1z)\end{cases}$$

なので. Prop 6.1.8 より,

$H(\Lambda V,d)$: fin. dim

$\therefore (\Lambda V,d)$: elliptic

よって Thm 6.1.4 より,

$\mathrm{fdim}(\Lambda V,d)=3+3-(2-1)-(2-1)=4$

deg	2	3	4
	x_1	$z\longmapsto$	x_1x_2
	x_2	$w\longmapsto$	$x_1^2+x_2^2$
			x_1^2

上図より.

$H^*(\Lambda V,d)=\mathbb{K}\{1,[x_1],[x_2],[x_1^2]\}$

ゆえに.

$$(\Lambda V,d)\underset{\exists}{\xrightarrow{\simeq^2}}A_{PL}\left(\mathbb{C}P^2\#\overline{\mathbb{C}P^2}\right)$$

なので, elliptic.

$\left(\overset{2}{\#}\mathbb{C}P^2\text{ や }\overset{2}{\#}\overline{\mathbb{C}P^2}\text{ でも同様}\right)$

$k+l\ge 3$ のとき

Example 4.2.5 の方法で

$$(\Lambda V,d)\xrightarrow{\simeq^2}A_{PL}\left(\left(\overset{k}{\#}\mathbb{C}P^2\right)\#\left(\overset{l}{\#}\overline{\mathbb{C}P^2}\right)\right)$$
: min Sullivan model

を計算する.

$\dim_{\mathbb{K}}H^2\left(\left(\overset{k}{\#}\mathbb{C}P^2\right)\#\left(\overset{l}{\#}\overline{\mathbb{C}P^2}\right)\right)=k+l$

なので.

$\dim_{\mathbb{K}}V^2=k+l\ge 3$

よって.

(even deg の生成元の deg の総和)

$\ge 3\cdot 2>4=\mathrm{fdim}(\Lambda V,d)$

ゆえに Thm 6.2.1 より,

$(\Lambda V,d)$: not elliptic